

Integral definida

Ángel Mediano Morando

Institut Joan Ramon Benaprès-Sitges

17 de noviembre de 2012

Integral de Riemann

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua:

• Int 1

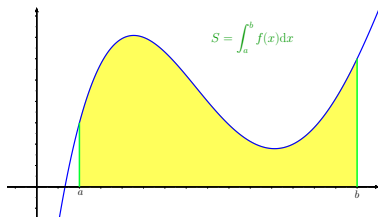
• Int 2

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_n L(f, P_n) = \lim_n U(f, P_n)$$

Los números a y b reciben el nombre, respectivamente, de límites de integración inferior y superior.

Interpretación geométrica de la integral definida

Si $\boxed{f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]}$ la $\int_a^b f(x)dx$ es por definición, el área del recinto encerrado entre la gráfica de la función, las rectas $x = a$ y $x = b$ con el eje de abscisas.



Observación

La integral definida $\int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$ (es UN NÚMERO REAL) negativo, positivo o cero.

Propiedades

Aditividad respecto del intervalo

Sea f una función integrable en $[a, b]$ y $c \in [a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Nulidad

Si $a = b$, entonces f es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

ATENCIÓN:

Si $\int_a^b f(x)dx = 0$ NO IMPLICA que $a = b$.

Anticonmutatividad

Sea f una función integrable en $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \boxed{\boxed{-}} \int_b^a f(x)dx$$

Linealidad de la integral definida

Sean f y g dos funciones integrables en $[a, b]$, entonces:

$$\bullet \int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\bullet \int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx, \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

Sean f y g dos funciones integrables en $[a, b]$ y $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

Valor absoluto

Sea f una función integrable en $[a, b]$, entonces:

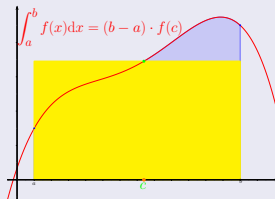
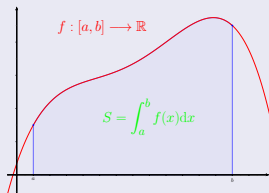
$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Teorema (Teorema del valor medio para funciones continuas)

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(c)$$

Interpretación geométrica del teorema del valor medio



Definición (Función integral)

Sea f una función continua en $[a, b]$. Se llama función integral de f , y se designa por F , a la función de:

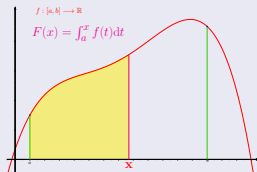
- dominio $[a, b]$

- $\forall x \in [a, b], F(x) = \int_a^x f(t) dt$

$$F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Interpretación geométrica de la función integral si $f(x) \geq 0$

La función integral F calcula el área del recinto limitado por:



Int-geo-fun

Teorema fundamental del cálculo integral

Teorema

Si f es continua en $[a, b]$, entonces la función integral $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es

DERIVABLE en $[a, b]$ y **$F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$**

Teorema (Regla de Barrow)

Si f es **CONTINUA** en $[a, b]$ y G es **UNA PRIMITIVA** de la función f , entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$$

Demostración.

Por el teorema fundamental del cálculo, la función integral $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ es UNA primitiva de la función f , $F'(x) = f(x)$. y la función $G(x)$, por hipótesis, también es una primitiva de la función f . Si dos funciones son primitivas de la misma función, se diferencian en una constante:

$\exists C \in \mathbb{R}$ tal que $\boxed{F(x) = G(x) + C} \forall x \in [a, b]$

$$\text{Si } x = a \implies F(a) = G(a) + C \implies \int_a^a f(t) dt = 0 = G(a) + C \implies C = -G(a)$$

$$\text{Si } x = b \implies F(b) = G(b) - G(a) \implies \int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$$

Teorema (Teorema de Barrow general)

Si f es una función acotada en $[a, b]$ y discontinua evitable en un número finito de puntos del intervalo y G es continua en $[a, b]$ y primitiva de f excepto en los puntos de discontinuidad de f , entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \left[G(x) \right]_a^b = G(b) - G(a)$$

Calcular las integrales definidas:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \int_2^6 \sqrt{x-2} dx &= \int_2^6 (x-2)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3} (x-2)^{\frac{3}{2}} \right]_2^6 \stackrel{(Barrow)}{=} \\ &= \frac{2}{3} \left[(6-2)^{\frac{3}{2}} - (2-2)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \int_1^e \frac{1}{x} dx = \left[\ln |x| \right]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

ATENCIÓN

- Si f es integrable pero no tiene primitivas entonces NO se puede aplicar la regla de Barrow.

La función $f(x) = e^{-x^2}$ es continua en todo su dominio y es integrable, pero no se puede aplicar la regla de Barrow.

- Si la función presenta discontinuidades asintóticas, no se puede aplicar la regla de Barrow.

No se puede aplicar la regla de Barrow para calcular la siguiente

integral: $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$. ¿Por qué?

- Si el intervalo de integración NO está acotado, no se puede aplicar la regla de Barrow.

No se puede aplicar la regla de Barrow para calcular la siguiente

integral: $\int_0^{+\infty} x^2 dx$. ¿Por qué?

Cambio de variable en una integral definida

Si f es continua en $[a, b]$ y $x = g(t)$ es un cambio de variable tal que g y g' son funciones continuas y $\begin{cases} g(c) = a \\ g(d) = b \end{cases}$, entonces:

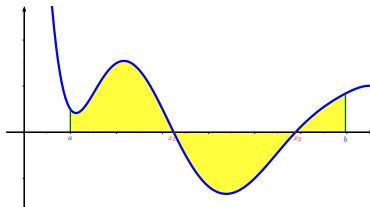
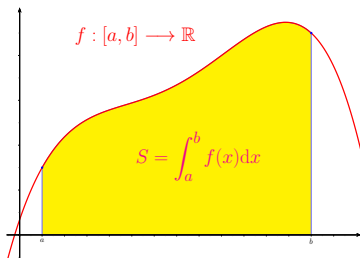
$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d (f \circ g)(t) \cdot g'(t) dt$$

Geogebra

Aplicando la interpretación geométrica de la integral definida:

- Si $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, entonces la $\int_a^b f(x)dx$ es el área (superficie) del trapecio mixtilíneo, limitado por el eje de abscisas, las rectas $x = a$ y $x = b$ y la gráfica de la función $f(x)$.
- Si la región está por encima, ($f(x) > 0$) y por debajo del eje de abscisas ($f(x) < 0$), entonces:
 - Puntos de corte con el eje de abscisas que pertenezcan al intervalo $[a, b]$.

$$S = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^{x_1} f(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^b f(x) dx$$



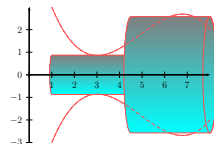
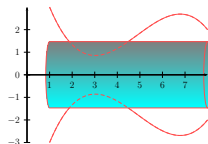
Superficie entre dos funciones

La superficie limitada por las gráficas de las funciones continuas f y g tal que $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$, y las rectas $x = a$ y $x = b$, viene expresada por:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

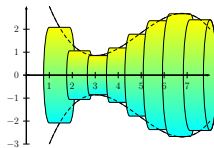
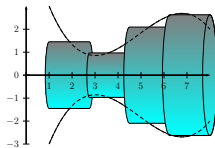
Geogebra

Volumen de un cuerpo de revolución



Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.
 Partición del intervalo $[a, b]$:

- $n = 1$ y $n = 2$
- $n = 4$ y $n = 8$
- $n = 16$ y $n = 32$



$$V_{OX} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

