

2.1. Desarrollo de un determinante de orden 2

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(K)$ entonces su determinante se calcula:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ejercicios

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 5 - 3 \cdot 1 = -10 - 3 = -13$$

2.2. Determinantes de orden 3. Regla de Sarrus

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(K)$: su determinante se calcula:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

La forma práctica de recordar los sumandos positivos y negativos recibe el nombre de **Regla de Sarrus**:

Positivos

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & \bullet & \bullet \\ \bullet & a_{22} & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_{33} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & a_{13} \\ a_{21} & \bullet & \bullet \\ \bullet & a_{32} & \bullet \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \bullet & a_{12} & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_{23} \\ a_{31} & \bullet & \bullet \end{array}$$

Negativos

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & a_{13} \\ \bullet & a_{22} & \bullet \\ a_{31} & \bullet & \bullet \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_{23} \\ \bullet & a_{32} & \bullet \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \bullet & a_{12} & \bullet \\ a_{21} & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_{33} \end{array}$$

Desarrollo

$$\begin{aligned}
 (+) : & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 (-) : & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Ejercicios

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (-8 - 18 - 2) - (6 - 2 + 24) = -28 - 28 = -56$$

2.3. Propiedades de los determinantes

Teorema 2.1 *Los determinantes de una matriz y su traspuesta son iguales: $|A| = |A'|$.*

Por el teorema anterior todos los teoremas cuyo enunciado sea para las filas de un determinante tienen automáticamente validez para las columnas.

Teorema 2.2 *El valor de un determinante en el cual todos los elementos de una fila (o columna) sean ceros es igual a cero.*

Teorema 2.3 *Si una fila (o columna) la multiplicamos (dividimos) por un escalar λ , el valor del determinante queda multiplicado (dividido) por λ .*

Ejercicios

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -56 \xrightarrow{\lambda=1/2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -28 \xrightarrow{\lambda=-2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -8 \end{vmatrix} = 56$$

Teorema 2.4 *Si en determinante se intercambian dos filas (columnas) adyacentes entonces el determinante cambia de signo.*

Consecuencia: Si en un determinante permutamos dos filas o dos columnas cualesquiera, el determinante cambia de signo.

Demostración: Aplicando el teorema anterior, al cambiar la fila i por la fila j habrá $(j - i) + (j - i) - 1$ cambios de filas adyacentes, es decir $2(j - i) - 1$ cambios, es decir un número impar de cambios de signo, por lo tanto habrá cambio de signo. Lo mismo ocurrirá si cambiamos columnas.

Teorema 2.5 *Si en determinante $|A|$ se desplaza una fila (columna) h filas (columnas), lo que implica h intercambios, entonces el determinante que resulta es igual a $(-1)^h \cdot |A|$.*

Teorema 2.6 *Si dos filas (columnas) de un determinante $|A|$ son iguales entonces $|A| = 0$.*

Demostración

Si intercambiamos las dos filas que son iguales:

$$|A| = -|A| \implies |A| + |A| = 0 \implies 2 \cdot |A| = 0 \implies |A| = 0$$

Consecuencia

Un determinante que tenga dos o más filas (columnas) proporcionales también es igual a cero.

Teorema 2.7 Si todo elemento de la fila k -ésima de un determinante viene dado como suma de dos sumandos $a_{ki} = b_{ki} + c_{ki}$ entonces:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ejercicios

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5+2 & 1+2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7 + 6 = 13$$

Teorema 2.8 El valor de un determinante **no cambia** si a todos los elementos de una de sus filas (columnas) se **suman** los elementos correspondientes de una fila (columna) paralela multiplicados por un escalar no nulo.

Demostración

Consideremos un determinante de orden n : $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Y sustituimos, por ejemplo, la primera fila por ella más un escalar por la segunda fila:

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda \cdot a_{21} & a_{12} + \lambda \cdot a_{22} & \cdots & a_{1n} + \lambda \cdot a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \stackrel{T_{5,7}}{=} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \cdots & \lambda \cdot a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \stackrel{T_{5,6}}{=} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A| \end{aligned}$$

El teorema se generaliza si lo enunciamos de la siguiente forma:

Teorema 2.9 (Propiedad fundamental de los determinantes) : El valor de un determinante no cambia si una de sus filas (columnas) se sustituye por ella más una combinación lineal de las restantes filas (columnas).

La demostración del teorema se deja como ejercicio.

Ejercicios

Por filas:

$$(a) \begin{vmatrix} f_1 & 3 & 5 & -7 \\ f_2 & -2 & 4 & 3 \\ f_3 & -1 & -9 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 + f_2 + f_3 & 3 - 2 - 1 & 5 + 4 - 9 & -7 + 3 + 4 \\ f_2 & -2 & 4 & 3 \\ f_3 & -1 & 9 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 9 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$(b) \begin{vmatrix} f_1 & 1 & 7 \\ f_2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & 1 & 7 \\ f_2 + (-3)f_1 & 0 & -19 \end{vmatrix} = -19$$

Por columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & b+a+c \\ 1 & c & c+a+b \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c) \cdot 0 = 0$$

Teorema 2.10 Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ entonces $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

2.4. Desarrollo general de un determinante

Definición 2.1 Sea A una matriz de orden n , se llama **menor** del elemento a_{ij} , se denota por M_{ij} al determinante de orden $n-1$ que se obtiene de suprimir la fila i -ésima y la columna j -ésima de la matriz A .

Definición 2.2 Sea A una matriz de orden n se llama **adjunto** del elemento a_{ij} , se denota por A_{ij} a su menor con el signo $(-1)^{i+j}$

Los signos de los adjuntos se van alternando de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots & (-1)^{1+n} \\ - & + & - & \cdots & (-1)^{2+n} \\ + & - & + & \cdots & (-1)^{3+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Los adjuntos de los elementos de la diagonal principal están afectados siempre por el signo $+$, en efecto: $(-1)^{i+i} = (-1)^{2i} = +1$.

Ejercicios

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & -7 \end{pmatrix} \text{ el menor del elemento } (2,1) \text{ es } M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -14.$$

$$\text{Su adjunto: } A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -(-14) = 14$$

Teorema 2.11 Si en un determinante de orden n todos los elementos de una fila (columna) son cero, excepto uno, entonces el determinante es igual al producto de dicho elemento, no nulo, por su adjunto.

Demostración

$$\text{Consideremos un determinante de orden } n: |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ aplicando la definici3n de}$$

determinante: $|A| = \sum_{p \in S(n)} s(p) a_{i_1 1} \cdot a_{i_2 2} \cdot a_{i_3 3} \cdots a_{i_n n}$ donde $[i_1, i_2, i_3, \dots, i_n]$ toma los valores $1, 2, 3, \dots, n$

el 3nico $a_{i_1 1} \neq 0$ es a_{11} por lo tanto sacamos factor com3n:

$$|A| = a_{11} \cdot \sum_{p \in S(n-1)} s(p) a_{i_2 2} \cdot a_{i_3 3} \cdots a_{i_n n} = a_{11} \cdot M_{11} = a_{11} \cdot A_{11}$$

Caso general:

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} \\
 &= (-1)^{i-1} \cdot (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} a_{ik} & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\
 &= (-1)^{i+k-2} \cdot a_{ik} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+k} \cdot a_{ik} \cdot M_{ik} = a_{ik} \cdot A_{ik}
 \end{aligned}$$

(1) Se traslada la fila i -ésima a la primera posición.

(2) Se traslada la columna k -ésima a la primera posición.

Teorema 2.12 Si dos determinantes difieren sólo en los elementos de una fila (columna) entonces los adjuntos de los elementos de dicha fila (columna) son iguales

Teorema 2.13 (Desarrollo general de un determinante) Todo determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila (columna) cualquiera por sus correspondientes adjuntos.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in}$$

Demostración

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} + 0 + \cdots + 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 + a_{2k} + \cdots + 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 + 0 + \cdots + a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_1 + D_2 + \cdots + D_n$$

donde

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} & D_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 D_n &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Aplicando el teorema anterior:

$$D_1 = a_{1k} \cdot A_{1k}, D_2 = a_{2k} \cdot A_{2k}, \cdots, D_n = a_{nk} \cdot A_{nk}$$

por lo tanto:

$$\det(A) = a_{1k} \cdot A_{1k} + a_{2k} \cdot A_{2k} + \cdots + a_{nk} \cdot A_{nk}$$

Ejercicios

$$\begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = (-5) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} + (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 1 & -8 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 \cdot 74 - 1 \cdot 28 - 4 \cdot (-14) - 3 \cdot (-26) = -264$$

OBSERVACIÓN:

El desarrollo de un determinante de orden n se realiza mediante un procedimiento mixto:

- (I) Aplicando las propiedades de los determinantes, se hacen ceros en una fila (columna).
- (II) Se desarrolla el determinante por el método general eligiendo como fila (columna) la de los ceros.

Ejercicios

$$\begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 21 & -9 & 26 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 17 & -12 & 19 \\ 0 & -10 & 9 & -13 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 \cdot f_2 + f_1 \\ f_2 \\ 4 \cdot f_2 + f_3 \\ -3 \cdot f_2 + f_4 \end{matrix} = 1 \cdot A_{21} =$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 21 & -9 & 26 \\ 17 & -12 & 19 \\ -10 & 9 & -13 \end{vmatrix} \begin{matrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{matrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 21 & -3 & 26 \\ 17 & -4 & 19 \\ -10 & 3 & -13 \end{vmatrix} \begin{matrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{matrix} =$$

$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} 21 & -3 & 26 \\ 7 & -1 & 6 \\ -10 & 3 & -13 \end{vmatrix} \begin{matrix} g_1 \\ g_2 + g_3 \\ g_3 \end{matrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 7 & -1 & 6 \\ 11 & 0 & 13 \end{vmatrix} \begin{matrix} g_1 + (-3) \cdot (g_2 + g_3) \\ g_2 + g_3 \\ g_3 + g_1 \end{matrix} =$$

$$= -3 \cdot 8 \cdot A_{13} = -24 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} = -24 \cdot 11 = -264$$

Teorema 2.14 La suma de los productos de los elementos de cualquier fila (columna) de un determinante por los adjuntos de los elementos correspondientes de una fila (columna) paralela es igual a cero.

Demostración

Sea

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Sustituyendo la fila k -ésima por la fila i -ésima, definimos el determinante D_1 y aplicando las propiedades su valor es cero:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante D_1 por la fila k -ésima:

$$a_{1i} \cdot A_{1k} + a_{2i} \cdot A_{2k} + \cdots + a_{ni} \cdot A_{nk} = 0$$

2.5. Aplicaciones de los determinantes

2.5.1. Cálculo de la matriz inversa

Definición 2.3 Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ llamamos **matriz adjunta** de A y la denotamos por A^* a la traspuesta de la matriz que tiene por elementos los adjuntos de cada uno de los elementos de la matriz A .

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Teorema 2.15 $\forall A \in \mathcal{M}_n(K)$ se verifica que $A \cdot A^* = A^* \cdot A = |A| \cdot I_n$

Demostración

$$\begin{aligned} A \cdot A^* &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_1^n a_{1i} \cdot A_{1i} & \sum_1^n a_{1i} \cdot A_{2i} & \cdots & \sum_1^n a_{1i} \cdot A_{ni} \\ \sum_1^n a_{2i} \cdot A_{1i} & \sum_1^n a_{2i} \cdot A_{2i} & \cdots & \sum_1^n a_{2i} \cdot A_{ni} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_1^n a_{ni} \cdot A_{1i} & \sum_1^n a_{ni} \cdot A_{2i} & \cdots & \sum_1^n a_{ni} \cdot A_{ni} \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{=} \\ &= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot I_n \end{aligned}$$

(1): Aplicando los teoremas 5.13 y 5.14.

Teorema 2.16 Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ posee inversa si y sólo si $|A| \neq 0$ y entonces $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$

Demostración

$\implies$) Por hipótesis la matriz A posee inversa, aplicando la definición: $\exists A^{-1}$ tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ entonces $|A \cdot A^{-1}| = |A^{-1} \cdot A| = |I_n|$ Aplicando el teorema (5.10) $|A| \cdot |A^{-1}| = |A^{-1}| \cdot |A| = 1$ si el producto de dos elementos del cuerpo K es no nulo entonces los factores tampoco lo son: $|A| \neq 0$ y $A^{-1} = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}$

$\Longleftarrow$) Aplicando el teorema anterior y la hipótesis $|A| \neq 0$:

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A = |A| \cdot I_n \implies A \cdot \frac{A^*}{|A|} = I_n$$

Aplicando la definición de matriz inversa A es invertible y su inversa es $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$

Definición 2.4 Una matriz cuadrada es **regular** si su determinante es no nulo.

Definición 2.5 Una matriz cuadrada es **singular** si su determinante es nulo.

2.5.2. Rango de una matriz

Definición 2.6 Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ y $k \leq m$, $k \leq n$, consideramos en la matriz k filas y k columnas cualesquiera. Con dichos elementos se forma un determinante de orden k . Todos estos determinantes reciben el nombre de **menores de orden k** de la matriz A

En una matriz de orden $m \times n$ se pueden formar $C_{m,k} \cdot C_{n,k}$ menores de orden k .

Ejercicios

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 4}(\mathbb{R})$

- Menores de orden 1: $C_{4,1} \cdot C_{3,1} = 12$, cada uno de los elementos de la matriz.
- Menores de orden 2: $C_{4,2} \cdot C_{3,2} = 6 \cdot 3 = 18$:

$$\begin{array}{cccccc} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

- Menores de orden 3: $C_{4,3} \cdot C_{3,3} = 4 \cdot 1 = 4$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Todos los menores de orden 3 son nulos, basta calcular los determinantes y no todos de orden 2 lo son, por ejemplo: $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$.

Definición 2.7 Se llama **rango de una matriz A** al orden máximo de sus menores no nulos. Se denota por $r(A)$ o $\text{rang } A$.

En el ejemplo, el $\text{rang}(A)=2$. El cálculo del rango de una matriz aplicando su definición es tedioso y complicado.

Transformaciones elementales en una matriz:

- Intercambiar dos filas (columnas).
- Multiplicar (dividir) una fila (columna) por un número no nulo.
- Sumar a todos los elementos de una fila (columna) los elementos correspondientes de una fila (columna) paralela multiplicada por un mismo número.

Teorema 2.17 El rango de una matriz **no cambia** al efectuar transformaciones elementales.

Consecuencia:

Toda matriz puede ser reducida mediante transformaciones elementales a la forma

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right)$$

donde en la "diagonal principal" aparecen r unidades, mientras que los restantes elementos son cero. Aplicando la definición de rango, el rango de la matriz es r .

Teorema 2.18 Si el rango de la matriz A es r entonces en la matriz existen r filas (columnas) linealmente independientes.

Demostración

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

tal que $\text{rang}(A) = r$. Sin perder generalidad, supondremos que :

$$D = \begin{vmatrix} e_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ e_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_r & a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

y queremos demostrar que las r -primeras filas son l.i.

Por reducción al absurdo: supongamos que son l.d., por definición, existirá, al menos una de ellas, que se expresará como c.l. de las restantes:

$$e_r = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \cdots + \alpha_{r-1} \cdot e_{r-1}$$

entonces aplicando las propiedades de los determinantes $D = 0$. Contradice la hipótesis que el rango de la matriz sea r , todos los menores de orden r serían cero. Por lo tanto existen r filas de la matriz l.i.

Corolario 2.1 El número máximo de filas linealmente independientes es igual al número máximo de columnas linealmente independientes.

Corolario 2.2 Un determinante es igual a cero si y sólo si sus filas (columnas) son linealmente dependientes.

Ejercicios

Calcular el rango de la matriz A :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} f_1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ f_2 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ f_3 & 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} f_1 - f_2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ f_2 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ f_3 & 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} f_1 - f_2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ f_2 + (-2)(f_1 - f_2) & 0 & -4 & -5 & -1 \\ f_3 & 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} f_1 - f_2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ f_2 + (-2)(f_1 - f_2) & 0 & -4 & -5 & -1 \\ f_3 + f_2 + (-2)(f_1 - f_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz que se obtiene por transformaciones elementales tiene dos filas l.i., implica que el rango de la matriz A es 2.

Observaciones:

- Al efectuar transformaciones elementales se puede trabajar indistintamente por filas y columnas.
- En la práctica para calcular el rango de una matriz se emplean los dos métodos, el de menores y el de filas (columnas) linealmente independientes.

Ejercicios

Calcular el rango de la matriz A , en función del parámetro λ :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

La matriz A es una matriz cuadrada de orden 3, por lo tanto su rango máximo es igual a 3 si su determinante es distinto de cero.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} \lambda+2 & \lambda+2 & \lambda+2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} \\ & = (\lambda+2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} (\lambda+2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2) \cdot (\lambda-1)^2 \end{aligned}$$

(1): La primera fila se obtiene sumando las tres filas.

(2): El factor $(\lambda+2)$ multiplica a todos los elementos de la primera fila.

(3): Se hacen ceros en los elementos a_{21} y a_{31}

$$|A| = (\lambda+2) \cdot (\lambda-1)^2 = 0 \iff \lambda = -2 \text{ y } \lambda = 1$$

Estudio del rango de la matriz

1. Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ entonces el rango de A es 3.

2. Si $\lambda = 1$ entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo tanto la matriz posee una fila l.i. es decir su rango es 1 ó todos los menores de orden 2 son cero y al menos uno de orden 1 es no nulo.

3. Si $\lambda = -2$ entonces:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz A tiene dos filas l.i., es decir, su rango es 2 o existe, al menos, un menor de orden 2 no nulo,

por ejemplo : $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$