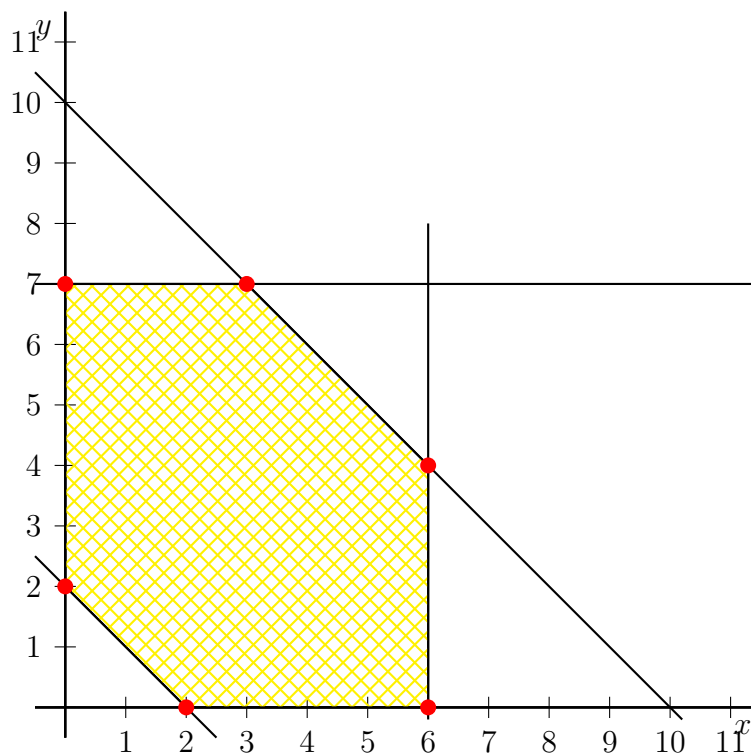


Institut Joan Ramon Benaprès



Departament de Matemàtiques

Problemes de selectivitat

Batxillerat Social

Índex

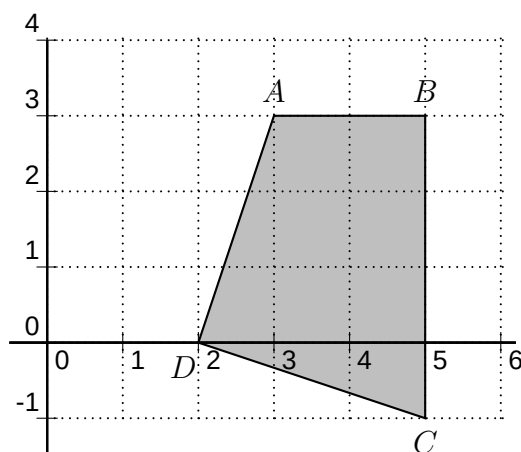
1	Selectivitat 2003-04	2
2	Selectivitat 04-05	8
3	Selectivitat 05-06	12
4	Selectivitat 06-07	16
5	Selectivitat 07-08	20
6	Selectivitat-2009	25
7	Selectivitat-2010	30
8	Selectivitat-2011	35
9	Selectivitat-2012	39
10	Selectivitat-2013	42
11	Selectivitat-2014	45

Capítol 1

Selectivitat 2003-04

QÜESTIONS

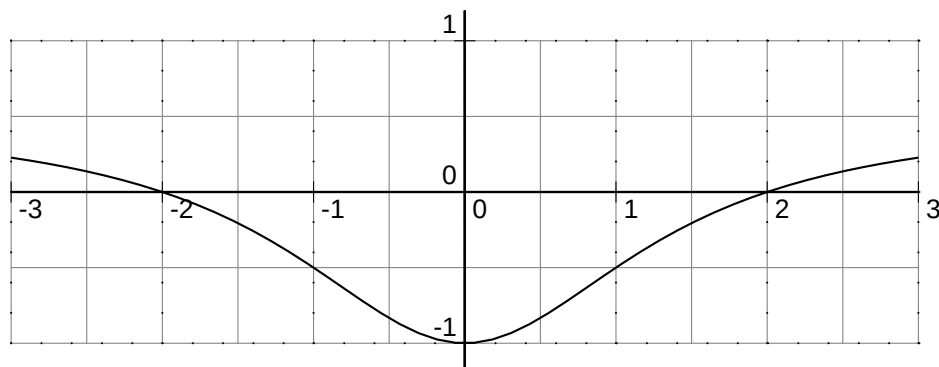
1. Sigui S la regió del pla de coordenades més grans o igual que zero i tal que els seus punts compleixen que:
 - (i) la mitjana aritmètica de les coordenades és menor o igual que 5
 - (ii) el doble de l'abscissa més l'ordenada és més gran o igual que 5
 - (a) Representeu gràficament el conjunt S .
 - (b) Determineu en quins punts de S la funció $f(x, y) = 2x + y$ pren el valor màxim.
2. El quadrilàter $ABCD$ és la regió solució d'un sistema d'inequacions lineals. Els costats del quadrilàter també formen part de la regió solució.



- (a) Trobeu el valor màxim i el mínim de la funció $f(x, y) = x + 3y$ en aquesta regió.
 - (b) En quins punts de la regió solució la funció de l'apartat anterior assolix el màxim i en quins, el mínim?
3. Sigui $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x < 1 \\ (x+a)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Per a quins valors del paràmetre a la funció és continua?

4. Observeu la gràfica següent de la funció $f(x)$ i digueu quin valor tenen (aproximadament)



- (a) $f(0)$ (b) x si $f(x) = 0$ (c) $f'(0)$ (d) $f'(-2)$

PROBLEMES

5. La Joana i la Mercè tenien 20000 € cadascuna per invertir. Cadascuna d'elles fa la mateixa distribució dels seus diners en tres parts P, Q i R, i les porta a una entitat financera. Al cap d'un any, a la Joana li han donat un 4% d'interès per la part P, un 5% per la part Q i un 4% per la part R i a la Mercè li han donat un 5% per la part P, un 6% per la part Q i un 4% per la part R. La Joana ha rebut en total 850 € d'interessos, mentre que la Mercè n'ha rebut 950 €. De quants euros constava cadascuna de les parts P, Q i R?
6. Tres germans tenen edats diferents, però sabem que la suma de les edats dels tres germans és de 37 anys, i la suma de l'edat del gran mes el doble de l'edat del mitjà mes el triple de l'edat del petit és de 69 anys.
- (a) Expresseu les edats dels tres germans en funció de l'edat del germà petit.
- (b) És possible que el germà petit tingui 5 anys? I 12 anys? Raoneu la resposta.
- (c) Calculeu l'edat dels tres germans.

QÜESTIONS

7. Un venedor té un salari mensual que està determinat per un sou fix més un cert percentatge sobre el volum de vendes que ha fet durant el mes. Si ven per valor de 2000 €, el seu salari és de 1200 €, si ven per valor de 2500 €, el salari és de 1300 €. Trobeu el percentatge que guanya sobre el total de vendes i el sou fix.
8. En estudiar un sistema lineal dependent del paràmetre k pel mètode de Gauss, hem arribat a la matriu ampliada següent:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & k-2 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \end{array} \right)$$

Discutiïu el sistema en funció del paràmetre k .

9. (a) Representeu gràficament la regió de solucions del sistema d'inequacions següent:

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ x + y \geq 2 \\ x - 2y + 4 \geq 0 \end{cases}$$

- (b) Calculeu el mínim de la funció $f(x, y) = x - 2y$ en la regió solució del sistema anterior. En quins punts d'aquesta regió s'assoleix aquest mínim?

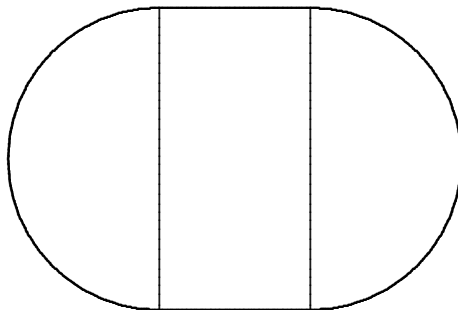
10. Decidiu si el polígon de vèrtexs consecutius $A(0, 0)$, $B(5, 2)$, $C(7, 1)$, $D(7, 6)$ i $E(0, 6)$ és la regió factible d'un problema de programació lineal. Justifiqueu la resposta.

PROBLEMES

11. Considereu la funció $f(x) = \frac{x^3}{30} - 15x^2 + 2500$.

- (a) Calculeu l'equació de la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 0$.
 (b) En quin punt de la corba és mínim el pendent de la recta tangent? Quin és el valor del pendent mínim?

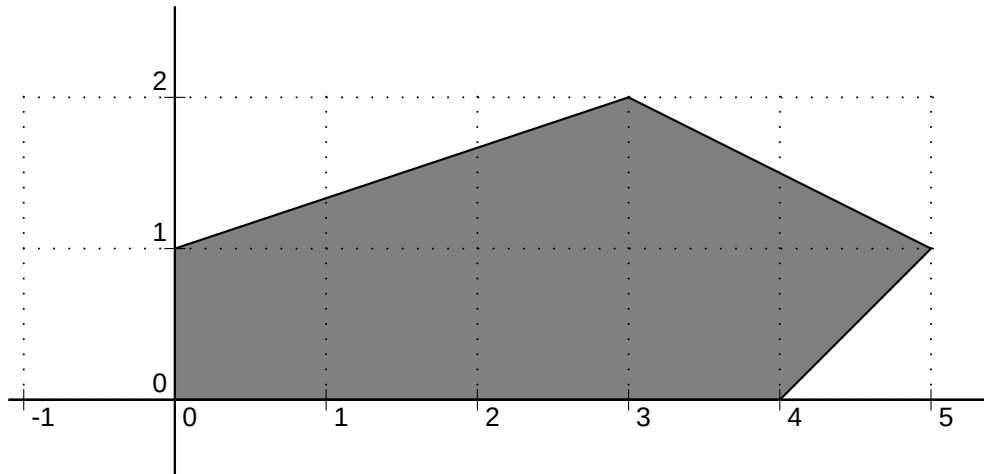
12. Es vol construir una piscina que tingui per base un rectangle i dos semicercles adjunts tal com s'indica a la figura següent:



Sabent que el perímetre de la piscina ha de ser de 30 m, calculeu les seves dimensions per tal que la superfície sigui màxima.

QÜESTIONS

13. Trobeu els punts de la regió del dibuix on la funció $f(x, y) = 2x + 4y + 5$ pren el valor màxim i digueu quin és el benefici màxim.



14. Maximitzeu la funció $f(x, y) = 2x - 3y$ amb les restriccions: $x + 2y \leq 24$, $2x + y \leq 10$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
15. Tenim dues caixes de llibres A i B. Si passem 12 llibres de la caixa A a la B, totes dues caixes tindran la mateixa quantitat de llibres. Si passem 12 llibres de la B a la A, la caixa A tindrà el triple de llibres que la caixa B. Quants llibres conté cada caixa?
16. Discussiu i, si escau, resoleu el sistema següent:

$$\begin{cases} 4x + 6y - 8z = 2 \\ 6x + 9y - 12z = 3 \\ x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

PROBLEMES

17. Sigui la funció: $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$
- Trobeu les equacions de les asímptotes de $f(x)$.
 - Estudieu el signe de la funció.
 - Estudieu el creixement i decreixement de la funció i indiqueu quins són els seus màxims i mínims.
 - Feu un esbós de la gràfica de $f(x)$.
18. Una empresa de lloguer de cotxes ens ofereix la possibilitat d'escollir entre dues tarifes:
- A: 20 € per dia més 0,2 € per quilòmetre recorregut
- B: 40 € per dia

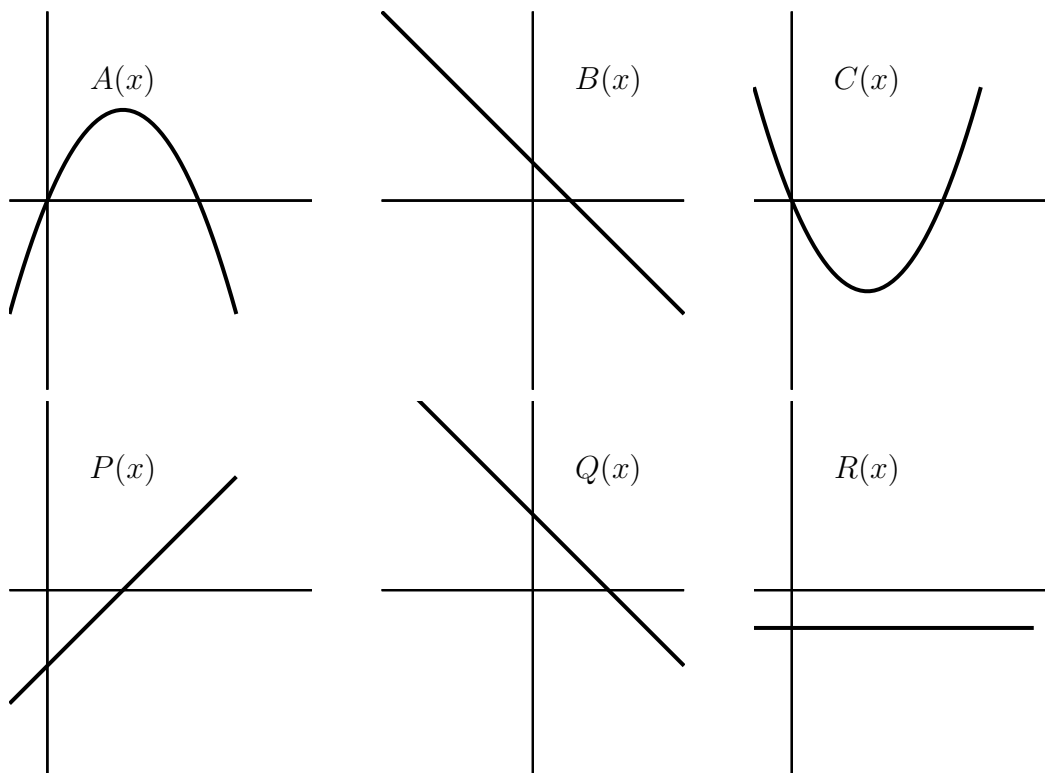
- (a) Per a cadascuna de les dues tarifes, expresseu el cost del lloguer en funció del nombre t de dies de durada del viatge i del quilometratge x .
- (b) Si s'han de fer 1000 km en 8 dies, a quina tarifa convé acollir-se? I si el viatge de 1000 km ha de durar 12 dies?
- (c) Si hem de fer 1000 km, per a quina durada del viatge el cost és el mateix amb les dues tarifes? Expliqueu quina tarifa ens interessa escollir en funció del nombre de dies que duri el viatge.

QÜESTIONS

19. Tenim un litre de llimonada que conté un 25% d'aigua i un 75% de suc de llimona. Si hi afegim un quart de litre d'aigua obtenim llimonada més aigualida. Calculeu el percentatge d'aigua i de suc de llimona de la llimonada més aigualida.
20. Discutiu i, si escau, resoleu el sistema següent segons els valors del paràmetre a :

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = a \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

21. El dibuix representa les gràfiques de les tres funcions $A(x)$, $B(x)$ i $C(x)$ i de les seves derivades $P(x)$, $Q(x)$ i $R(x)$, no necessàriament en el mateix ordre. Associeu cada funció



$A(x)$, $B(x)$ i $C(x)$ amb la seva respectiva funció derivada $P(x)$, $Q(x)$ o $R(x)$. Raoneu la resposta.

22. Trobeu els valors de b i c per tal que la funció $f(x) = x^2 + bx + c$ tingui un extrem relatiu en el punt $(-1, -4)$. Quin tipus d'extrem és?

PROBLEMES

23. Un curs de segon de batxillerat d'un institut té un grup que està format per 20 noies i 10 nois, que volen organitzar un viatge de fi de batxillerat. A fi de recollir diners, troben una feina de fer enquestes. L'empresa contracta equips de joves per fer enquestes durant les tardes lliures que poden ser de dos tipus: A: parelles d'un noi i una noia. B: equips de tres noies i un noi. Paguen a 40 € la tarda els equips A i a 90 € la tarda els equips B. Com els convé distribuir-se per obtenir la major quantitat possible de diners? Quina quantitat de diners obtindran per tarda treballada?
24. Un taller de confecció fabrica dos models de vestits. Per fer el model A es necessiten 2 m de teixit de color, 1 m de teixit blanc i 4 hores de feina. Per fer el model B es necessiten 2,5 m de teixit de color, 0,5 m de teixit blanc i 3 hores de feina. El taller disposa, cada dia, d'un màxim de 250 m de teixit de color, 100 m de teixit blanc i 380 hores de feina.
- (a) Anomeneu x i y el nombre de vestits dels models A i B respectivament fets cada dia. Expresseu mitjançant un sistema d'inequacions les restriccions de la producció.
 - (b) Representeu gràficament la regió del pla que satisfà les inequacions.
 - (c) La venda d'un vestit del model A porta al taller un benefici de 5 €, i la d'un vestit del model B, de 4 €. Suposant que la producció diària es ven íntegrament, quants vestits de cada tipus cal fer per tal d'obtenir el màxim benefici? Quant val el benefici màxim?
 - (d) En aquest últim cas, quin tipus de teixit sobrarà i en quina quantitat?

Capítol 2

Selectivitat 04-05

QÜESTIONS

1. Resoleu el sistema d'equacions següent:
$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ 2x + 3y - 4z &= 9 \\ x - y + z &= -1 \end{cases}$$
2. (a) Determineu la regió solució del sistema i el seu vèrtex:
$$\begin{cases} 3x + y &\geq 10 \\ x - 3y &\leq 0 \end{cases}$$

(b) Calculeu el valor de la funció $f(x, y) = x - 4y$ en el vèrtex i expliqueu raonadament si correspon a un extrem de $f(x, y)$ i de quina classe és.
3. (a) Calculeu els punts del gràfic de la corba $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ on la recta tangent té pendent $-\frac{1}{3}$
(b) Determineu la recta tangent en aquests punts.
4. La funció $f(x) = \frac{90x + 100}{x + 5}$ indica el nombre de minuts que s'aconsella de caminar diàriament en funció del nombre x de setmanes que han passat des que es va començar un programa de manteniment.
(a) Segons aquest programa de manteniment, a partir de quina setmana s'ha de caminar més d'una hora?
(b) Feu un gràfic aproximat de la funció i expliqueu el seu creixement. Quant de temps aproximadament hauria de dedicar diàriament a caminar una persona que fa molt de temps que segueix el programa?

PROBLEMES

5. En una empresa es fabriquen dos tipus de peces que anomenarem A i B. Per fabricar una peça de tipus A es necessiten 2 quilos d'un metall i per fer-ne una de tipus B, 4 quilos del mateix metall. L'empresa disposa com a màxim de 100 quilos de metall i no pot fabricar més de 40 peces de tipus A ni més de 20 de tipus B.

- (a) Doneu un sistema d'inequacions que representi les restriccions en la fabricació que té l'empresa.
- (b) Determineu gràficament els punts del pla que verifiquen aquest sistema.
- (c) D'entre les solucions obtingudes, quins són els possibles valors de peces de cada tipus (han de ser enters) si es volen exhaurir els 100 quilos de metall? Expliqueu detalladament què feu per trobar-los.
6. Una marca comercial utilitza tres ingredients A, B i C en l'elaboració de tres tipus de pizzas P1, P2 i P3. La pizza P1 s'elabora amb 1 unitat de A, 2 de B i 2 de C, la P2 s'elabora amb 2 unitats de A, 1 de B i 1 de C, i la P3 s'elabora amb 2 unitats de A, 1 de B i 2 de C. El preu de venda al públic és de 4,80€ per a P1, 4,10€ per a P2 i 4,90€ per a P3. Sabent que el marge comercial (benefici) és d'1,60€ en cadascuna, trobeu quant costa cada unitat de A, B i C a la marca comercial esmentada.

QÜESTIONS

7. El preu d'un bitllet d'una línia d'autobusos és la suma d'una quantitat fixa i una altra proporcional al nombre de quilòmetres del recorregut. S'han pagat 18€ per un bitllet a una població que és a 500 km i 33€ per un altre a una ciutat que és a 1000 km. Quant haurem de pagar per un bitllet a una població que és a 250 km?
8. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculeu A^{55} .
9. Calculeu a i b de manera que $f(x) = a \ln(x) + bx^2 + x$ tingui extrems relatius en els punts d'abscisses $x = 1$ i $x = 2$, i digueu, en cada cas, si es tracta d'un màxim o d'un mínim.
10. Calculeu en quins punts de la regió determinada pel sistema d'inequacions

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 4x + 3y - 4 \geq 0 \\ 3x + 5y \leq 15 \end{cases}$$

la funció $F(x, y) = \frac{4x}{3} + y$ pren els seus valors màxim i mínim, i quins són aquests valors.

PROBLEMES

11. Considereu la funció $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- (a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la corba que representa $f(x)$, en el punt d'abscissa $x = 2$.
- (b) Quina és la funció que dóna el pendent de la recta tangent en cadascun dels punts de la corba?
- (c) Calculeu el punt de la corba que representa $f(x)$ en el qual el pendent de la recta tangent és màxim. Trobeu el valor d'aquest pendent màxim.

12. Un taller pot produir per dia com a màxim 12 articles del tipus A i 20 del tipus B. Cada dia el servei tècnic pot controlar un mínim de 20 articles i un màxim de 25, independentment del tipus.
- Siguin x i y el nombre d'articles produïts per dia dels tipus A i B, respectivament. Expresseu les condicions anteriors mitjançant un sistema d'inequacions en x i y .
 - Representeu la regió del pla determinada per aquest sistema.
 - Sabem que el benefici de produir els articles de tipus A és el doble del que s'obté amb els articles de tipus B. Trobeu quants articles de cada tipus ha de produir el taller per obtenir el benefici màxim.

QÜESTIONS

13. Un magatzem de rodes de vehicles de diferents tipus té l'estoc de components (en centenars d'unitats) donat per la taula següent:

	Pneumàtics	Embellidors	Llantes
Utilitaris	3,1	0,3	2,1
Berlines	1,6	1,1	0,6
Tot terrenys	0,9	0	0,2

La quantitat de quilos de primera matèria necessària per a cada component és:

	Acer	Cautxú
Pneumàtics	0,1	4,6
Embellidors	1	0,05
Llantes	5	0

- Calculeu el total d'acer acumulat en el magatzem.
 - Calculeu el total de cautxú acumulat en el magatzem.
14. Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trobeu la matriu $X = A \cdot (B - C)$
15. La corba d'equació $y = 3x^2 - 1$ i la recta $y = 4x + b$ són tangents.
- Determineu el punt de tangència.
 - Determineu b .
16. (a) Resoleu gràficament el sistema d'inequacions:
$$\begin{cases} x \leq 5 \\ 2 \leq y \leq 4 \\ y - x \leq 0 \end{cases}$$
- (b) Trobeu tots els punts (x, y) que siguin solucions enteres del sistema i que compleixin $x = y$.

PROBLEMES

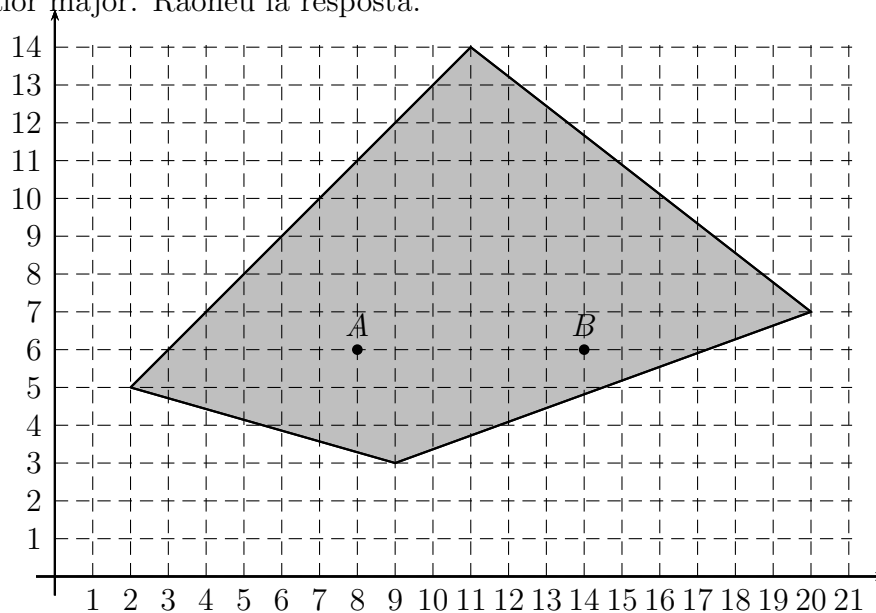
17. Si una joguina es ven a 130€, la compren 1000 persones. Per cada euro que augmenta aquest preu, disminueix en 50, respectivament, el nombre de compradors.
- (a) Feu un gràfic del nombre de joguines que es venen en funció del preu de venda i doneu la fórmula que l'expressa.
 - (b) El preu de cost d'una joguina és de 80 €. Calculeu el preu p , que dona un benefici total màxim.
 - (c) Trobeu el nombre de joguines que es venen si el preu és p i calculeu-ne el benefici màxim.
18. Una empresa de telefonia mòbil fabrica dos models de telèfon: A i B. El nombre total de telèfons fabricats mensualment no supera els 3000. També sabem que sempre es fabriquen almenys 1000 unitats de telèfons A i que la meitat dels telèfons A no supera la tercera part dels telèfons B. Si els telèfons A generen un benefici de 40 € per unitat i els B generen un benefici de 20 € per unitat, trobeu la quantitat de cada classe que s'ha de fabricar per obtenir un benefici també màxim i també aquest benefici màxim.

Capítol 3

Selectivitat 05-06

QÜESTIONS

1. Considereu la funció $f(x) = \frac{3-2x}{x}$.
 - (a) Trobeu els punts de la gràfica en els quals la recta tangent és paral·lela a la recta $3x + 4y + 5 = 0$.
 - (b) Calculeu les equacions d'aquestes rectes tangents.
2. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, esbrineu si existeix una matriu C que compleixi $B \cdot C = A$, i si s'escau, calculeu-la.
3. Discutiu en funció del paràmetre p el sistema d'equacions lineals de matriu ampliada:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & p+5 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & p-1 & 0 \end{array} \right)$$
4. La funció objectiu d'un problema de programació lineal és $f(x, y) = ax - by + c$, amb a, b i c nombres positius. Esbrineu a quin dels dos punts A o B del gràfic la funció objectiu pren un valor major. Raoneu la resposta.



PROBLEMES

5. Si el preu de l'entrada d'un cinema és de 6€, hi van 320 persones. El propietari sap per experiència que per cada augment de 0,25€ en el preu de l'entrada hi van 10 espectadors menys. Trobeu:
 - (a) la funció que determina el nombre d'espectadors en funció del preu de l'entrada;
 - (b) la funció que determina els ingressos del cinema en funció del preu de l'entrada;
 - (c) el preu que de l'entrada per tal que els ingressos del propietari siguin màxims;
 - (d) el nombre d'espectadors que aniran al cinema quan el preu sigui el que correspon als ingressos màxims i aquests ingressos màxims.
6. Els alumnes d'un institut disposen de 300 samarretes, 400 llapis i 600 bolígrafs per finançar-se un viatge. Tenen la intenció de vendre'ls en dos tipus de lots: el lot *A* conta d'1 samarreta, 3 llapis i 2 bolígrafs i el venen per 9€. El lot *B* conta d'1 samarreta, 2 llapis i 4 bolígrafs i el venen per 11€. Calculeu quants lots de cada tipus han de vendre per treure'n el benefici màxim i aquest benefici màxim.

QÜESTIONS

7. (a) Representeu la regió solució del sistema d'inequacions lineals següent:
$$\begin{cases} 3x - 2y \leq 3 \\ x + y \leq -1 \end{cases}$$
 (b) Determineu tres punts d'abscissa $x = -2$ i ordenada entera que siguin solució del sistema.
8. En un problema de programació lineal la regió factible es el conjunt convex format pel triangle de vèrtexs: $(0, 0)$, $(0, 1)$ i $(1, 0)$. La funció objectiu es paral·lela a la recta $x + y = 0$. Trobeu els punts en que la funció objectiu assoleix:
 - (a) el mínim;
 - (b) el màxim
9. Discutiu en funció del paràmetre m el sistema d'equacions següent:
$$\begin{cases} 3x + y + mz = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$
 En el cas que sigui possible doneu també la solució.
10. Considereu la funció:
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
 (a) Dibuixeu la gràfica. (c) Determineu els extrems relatius.
 (b) Estudieu-ne la continuïtat.

PROBLEMES

11. El benefici $B(x)$ (expressat en milers d'euros) que obté una empresa per la venda de x unitats d'un determinat producte es representat per la funció:

$$B(x) = -x^2 + 300x - 16100 \text{ per a } 50 \leq x \leq 250$$

- (a) Si ha venut 110 unitats, quin benefici ha obtingut?
- (b) Quantes unitats pot haver venut si el benefici obtingut ha estat de 3.900 milers d'euros?
- (c) Quantes unitats ha de vendre per tal que el benefici sigui màxim? Quin es aquest benefici màxim?
- (d) Quina quantitat d'unitats ha de vendre per no tenir pèrdues?
12. La despesa mensual en salaris d'una empresa de 36 treballadors es de 54.900€. Hi ha tres categories de treballadors que indicarem A, B i C. El salari mensual d'un treballador de la categoria A es de 900€, el d'un de la B es de 1.500€ i el d'un de la C es de 3.000€. Sense acomiadar ningú, l'empresa vol reduir la despesa salarial en un 5%. Per fer-ho ha rebaixat un 5% el salari de la categoria A, un 4% el de la B i un 7% el de la C. Esbrineu quants treballadors hi ha de cada categoria.

QÜESTIONS

13. En els sis primers mesos, des que va obrir, una llibreria ha anat anotant el nombre de compradors de cada mes. Aquest nombre $N(x)$ es pot ajustar per la funció $N(x) = \frac{1000x - 600}{x}$, essent x el número del mes comptat des que van obrir.
- (a) Quants compradors van tenir el segon mes? En quin mes, comptat a partir de l'obertura, van tenir 900 compradors?
- (b) Suposem que aquesta fórmula serveix per predir el nombre de compradors en el futur. Podem assegurar que aquest nombre sempre anirà en augment? Expliqueu detalladament el perquè de la vostra resposta.

14. Discutiu en funció del paràmetre a el sistema següent:
$$\begin{cases} x + y + z &= 5 \\ 5x + y - z &= 11 \\ 3x - y + az &= 2 \end{cases}$$

15. Afegiu inequacions al sistema:
$$\begin{cases} x \leq y \\ 3y \leq x + 12 \end{cases}$$
 per tal que la regió de les solucions del sistema resultant tingui forma de paral·lelogram. Justifiqueu l'elecció que heu fet.

16. Indiqueu **TOTS** els productes de dues matrius diferents que es poden fer amb les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$$

PROBLEMES

17. Considereu la funció:
$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- (a) Estudieu-ne la continuïtat.

- (b) Determineu els intervals de creixement i decreixement de la funció.
 - (c) Feu un gràfic aproximat de la funció.
 - (d) Trobeu els extrems relatius i absoluts en l'interval $[-2, 2]$.
18. En un jardí municipal es volen plantar un mínim de 1.200 geranis, 3.200 clavells i 3.000 margarides. Una empresa A ofereix un lot que conté 30 geranis, 40 clavells i 30 margarides per 15€. Una altra empresa B ofereix un lot de 10 geranis, 40 clavells i 50 margarides per 12€. L'Ajuntament compra x lots a l'empresa A i y lots a l'empresa B.
- (a) Determineu les inequacions que representen les restriccions a les quals estan sotmesos els valors de x i de y per tal que compleixin les condicions de la plantació.
 - (b) Representeu gràficament la regió del pla que satisfà les inequacions.
 - (c) Trobeu el nombre de lots de cada tipus que fan que la despesa sigui mínima i calculeu aquesta despesa mínima.
 - (d) Trobeu quants geranis, clavells i margarides adquireix l'Ajuntament amb la compra de preu mínim i quantes plantes i de quin tipus haurà adquirit per sobre del mínim que vol plantar.

Capítol 4

Selectivitat 06-07

QÜESTIONS

1. (a) Discutiu el sistema següent segons els valors del paràmetre a :

$$\left. \begin{array}{rcl} x + (a+1)y & = & 1 \\ ax + 2y & = & 2 \end{array} \right\}$$

- (b) Resoleu-lo per al valor de a que el fa indeterminat.

2. Considereu la funció definida a trossos següent:

$$f(x) = \begin{cases} -4x + a & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 - 5 & \text{si } -2 < x < 1 \\ bx + 3 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

- (a) Calculeu els valors de a i b per tal que $f(x)$ sigui contínua per a tot x .

- (b) Feu un gràfic de la funció obtinguda en l'apartat anterior.

3. Considereu el sistema d'inequacions següent:

$$\left. \begin{array}{rcl} x + 2y & \leq & 8 \\ x + y & \geq & 5 \\ x - 5y & \leq & 0 \end{array} \right\}$$

- (a) Resoleu-lo gràficament.

- (b) Trobeu-ne totes les solucions enteres.

4. Trobeu un sistema d'inequacions que tingui com a conjunt de solucions l'interior i els costats del triangle del pla de vèrtexs $(0, 0)$, $(2, 3)$ i $(3, 1)$.

PROBLEMES

5. Els beneficis mensuals d'un artesà expressats en euros, quan fabrica i ven x objectes, s'ajusten a la funció $B(x) = -0,5x^2 + 50x - 800$, en què $20 \leq x \leq 60$.

- (a) Trobeu el benefici que obté en fabricar i vendre per 20 objectes i en fabricar i vendre 60 objectes.

- (b) Trobeu el nombre d'objectes que ha de fabricar i vendre per a obtenir el benefici màxim, així com aquest benefici màxim.
- (c) Feu un esbós del gràfic de la funció $B(x)$.
- (d) El benefici mitjà per x objectes és $M(x) = \frac{B(x)}{x}$. Digueu quants objectes ha de fabricar i vendre perquè el benefici mitjà sigui màxim, i quin és aquest benefici.
6. Un taller de confecció fa jaquetes i pantalons per a criatures. Per a fer un jaqueta es necessiten 1 m de roba i 2 botons, i pera fer uns pantalons calen 2m de roba, 1 botó i una cremallera. El taller disposa de 500 metres de roba, 400 botons i 225 cremalleres. El benefici que s'obté per la venda d'una jaqueta és de 20 € i per la d'uns pantalons és de 30 €. Suposant que es ven tot el que es fabrica:
- (a) Calculeu el nombre de jaquetes i de pantalons que s'han de fer per tal d'obtenir un benefici màxim. Determineu també aquest benefici màxim.
- (b) si EL material sobrant es ven a 1 € el metre de roba, a 0,20 € cada cremallera i a 0,01 euros cada botó, calculeu quant es pot obtenir de la venda del que ha sobrat.

QÜESTIONS

7. Trobeu el màxim de la funció $f(x, y) = 5x + y - 13$ en la regió tancada definida pel triangle de vèrtexs $A = (2, 4)$, $B = (6, 8)$ i $C = (7, 3)$, així com el punt o els punts on s'obté aquest màxim.
8. Una companyia aèria de baix cost fa vols des de Girona fins a tres ciutats, A, B i C. Calculeu el preu dels bitllets a cada ciutat amb la informació següent: si ven 10 bitllets per anar a la ciutat A, 15 per a la B i cap per a la C, ingressa 925 €; si ven 12 bitllets per a A, 8 per a B i cap per a C, ingressa 760 €; si ven 5 bitllets per a A, 5 per a B i 8 per a C, ingressa 855 €.
9. En un taller fabriquen dos tipus de bosses. Per fer una bossa del primer model es necessiten 0,9m² de cuir i 8 hores de feina. Per al segon model necessiten 1,2m² de cuir i 4 hores de feina. Per a fer aquests dos tipus de bosses el taller disposa de 60m² de cuir i pot dedicar-li un màxim de 400 hores de feina.
- (a) Expressau, mitjançant un sistema d'inequacions, les restriccions a les quals està sotmesa la producció d'aquests dos models de bosses.
- (b) Representeu la regió solució d'aquest sistema i trobeu-ne els vèrtexs.
10. La funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ té un màxim en el punt (1, 4) i passa pel punt 3, 0. Trobeu a , b i c .

PROBLEMES

11. Considereu la funció real de variable real $f(x) = \frac{2x + m}{x}$, on m és un paràmetre real.
- (a) Calculeu el valor que ha de tenir m perquè la tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = -3$ sigui paral·lela a la recta $x - 3y + 1 = 0$. Calculeu també l'equació d'aquesta tangent.
- Ara fixe el valor de $m = 1$.

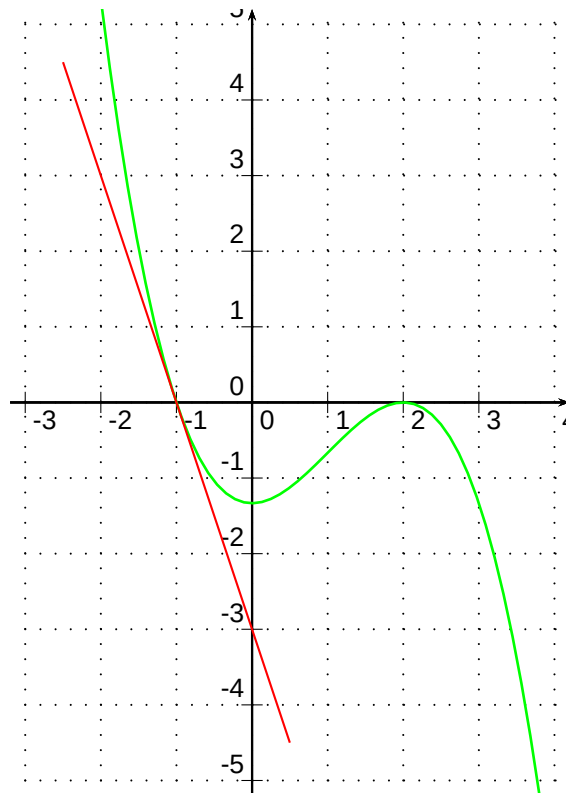
- (b) Determineu el domini de la funció i els intervals on és creixent o decreixent.
- (c) Determineu-ne les asímptotes.
- (d) Dibuixeu un esbós de la gràfica resultant.
12. Tres entitats financeres, A, B i C, ofereixen, respectivament, per a dipòsits superiors a 2000 euros, un interès anual del 2%, 3% i $k\%$ (que no coneixem). La Joana, en Manel i en Dani decideixen invertir els estalvis en aquestes entitats durant un any. Sabem que si tots ho fessin a l'entitat A, obtindrien en total uns beneficis de 164 €; però si la Joana optés per A, en Manel per C i en Dani per B, obtindrien 192 €; finalment, si la Joana i en Manel es decidissin per B i en Dani per C, obtindrien 218 €.
- (a) Escriviu un sistema d'equacions que descriu la situació.
- (b) Sense resoldre el sistema, determineu la quantitat total de diners invertida entre les tres persones.
- (c) Trobeu, si existeix, un valor de k per al qual hi hagi infinites solucions. Resoleu el sistema per a aquest valor de k , i doneu-ne tres solucions diferents.

QÜESTIONS

13. Considereu la funció $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$.
- (a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la corba $y = f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 2$.
- (b) Determineu els intervals de creixement i decreixement, així com els extrems, si n'hi ha.
14. Resoleu el sistema següent:
$$\begin{cases} x + 2y - 5z &= 1 \\ -3x + y - 2z &= 7 \\ 2x - 3y + z &= -12 \end{cases}$$
15. Considereu el sistema d'inequacions següent:
$$\begin{cases} x - y + 1 &\geq 0 \\ x + y &\geq 1 \\ 5x + y &\leq 13 \end{cases}$$
- (a) Representeu gràficament la regió factible.
- (b) Calculeu el màxim de la funció $f(x, y) = x - 3y$ en aquesta regió.
16. Escriviu un sistema d'inequacions lineals que doni com a zona solució l'interior del paral·lelogram que té vèrtexs $A(1, 1)$, $B(5, 5)$, $C(3, 8)$, i $D(-1, 4)$.

PROBLEMES

17. La corba $y = f(x)$ de la figura té per domini el conjunt de tots els nombres reals.



- Determineu els punts on la funció val 0. Determineu els valors de x pels quals la funció és positiva.
 - Digueu en quins punts s'anul·la la derivada i en quins punts $f'(x) < 0$.
 - Trobeu l'equació de la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 2$.
 - Determineu la recta tangent en el punt d'abscissa $x = -1$.
 - Determineu a sabent que $f(x) = a(x + 1)(x - 2)^2$.
18. Una persona va a la vinateria i compra tres classes de vi. En total, en compra 20 botelles i s'hi gasta 100 €. Compra botelles de tres classes, A, B i C, que costen 3 €, 7 € i 8 euros respectivament. Trobeu el nombre de botelles de cada classe que ha comprat, sabent que almenys n'ha comprat una de cada classe.

Capítol 5

Selectivitat 07-08

QÜESTIONS

1. Considereu el sistema d'inequacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 3y \leq 18 \\ x + y \leq 10 \end{array} \right\}$$

- (a) Representeu gràficament la regió de solucions.
- (b) Determineu el màxim de la funció $f(x, y) = 3x + 5y$ en aquesta regió i per a quins valors s'assoleix aquest màxim.
- (c) Determineu el màxim de la funció $f(x, y) = 3x + 3y$ en aquesta regió i per a quins valors s'assoleix aquest màxim.
2. Determineu els intervals de creixement i decreixement, així com els màxims i mínims, de la funció $f(x) = x^2 e^{-x}$.
3. En un problema de programació lineal, la regió de solucions és el quadrat de vèrtexs $(1, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 3)$ i $(3, 1)$, i la funció és $B(x, y) = 3x + 2y$.
- (a) Determineu en quin punt és màxima la funció objectiu i quin valor és aquest valor màxim.
- (b) Doneu un conjunt d'inequacions que determini la regió de solucions.
4. Considereu el sistema equacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ ax + 10y + 4z = 2 \end{array} \right\}$$

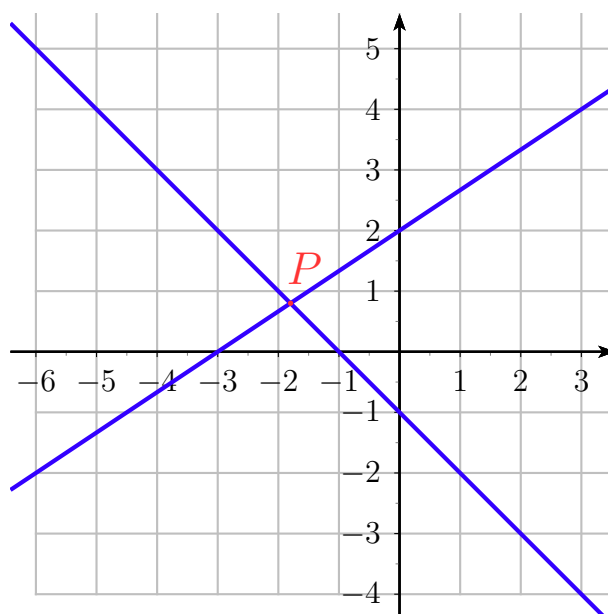
- (a) Trobeu els valors de a per als quals el sistema no és compatible determinat.
- (b) Trobeu el valor de a per al qual el valor de x és 2. Determineu també els valors de y i de z en aquest cas.

PROBLEMES

5. Un trajecte de 200 km s'ha de fer combinant taxi, ferrocarril i autobús. El cost del taxi és de 5 €/km; el del ferrocarril, de 2 €/km, i el de l'autobús, de 3 €/km. El recorregut ens ha costat 500 €, per haver fet el doble de kilòmetres amb ferrocarril que amb taxi i autobús junts. Determineu les distàncies que hem recorregut amb cada mitjà de transport.
6. Un equip de treballadors ha de fer la collita d'un camp de pomeres a partir d'l'1 d'octubre i només pot treballar durant un dia. Si la collita es fa l'1 d'octubre, es colliran 60 tones i el preu serà de 2000 €/tona. Sabem que a partir d'aquest dia, la quantitat que es pot collir augmenta en una tona cada dia, però el preu de la tona disminueix en 20 €/dia.
 - (a) Determineu la fórmula que expressa els ingressos que s'obtenen en funció del nombre de dies que es deixen passar des de l'1 d'octubre per fer la collita.
 - (b) Trobeu quants dies han de passar perquè els ingressos per la collita siguin màxims.
 - (c) Digueu quin és el valor màxim dels ingressos per la collita.
 - (d) Trobeu quants dies han de passar perquè els ingressos per la collita siguin els mateixos que si es fes el dia 1 d'octubre.

QUESTIONS

7. Cadascuna de les rectes del gràfic passa, almenys, per dos punts de coordenades enteres.
 - (a) Trobeu les equacions de les dues rectes.
 - (b) Determineu el punt d'intersecció P .



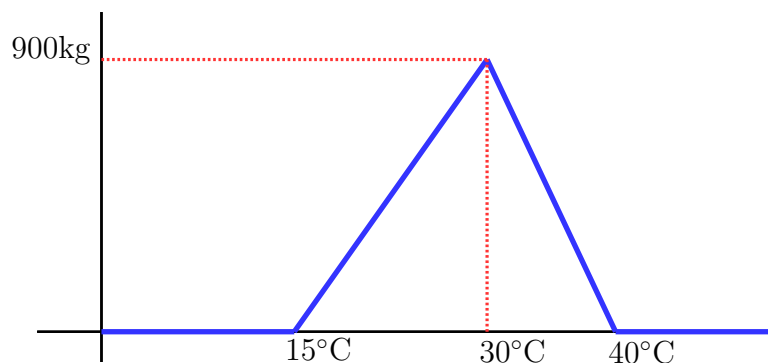
8. Donades les matrius següents: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

- (a) Calculeu $A^2 + 2AB + B^2$.

- (b) Calculeu $(A + B)^2$.
9. Trobeu un sistema d'inequacions que tingui com a conjunt de solucions l'interior i els costats del triangle de vèrtexs $(0, 1)$, $(2, 0)$ i $(3, 4)$.
10. Una fàbrica de televisors ven cada aparell a 300 €. Les despeses derivades de fabricar x televisors son $D(x) = 200x + x^2$, en que $0 \leq x \leq 80$.
- (a) Suposant que es venen tots els televisors que es fabriquen, trobeu la funció dels beneficis que s'obtenen després de fabricar i vendre x televisors.
- (b) Determineu el nombre d'aparells que convé fabricar per a obtenir el benefici màxim, i també quin és aquest benefici màxim.

PROBLEMES

11. El vaixell de Barcelona a Palma de Mallorca porta automòbils i camions a la bodega. Cada camió ocupa quatre places d'automòbil. La superfície total de la bodega permet situar-hi fins a 200 automòbils. Cada automòbil pesa 1000 kg, i cada camió, 9000 kg. El pes total permès per a la càrrega és de 300 000 kg. La companyia cobra 50 € per cada cotxe i 300 € per cada camió. Calculeu el nombre de cotxes i camions que s'han de carregar per a obtenir un benefici màxim, i també quin és aquest benefici màxim.
12. Un hivernacle està destinat al cultiu de tomàquets. Se sap que les tomaqueres només produeixen fruits si la temperatura dins l'hivernacle està entre 15 °C i 40 °C. En la gràfica següent es mostra la producció de tomàquets en kilograms, segons la temperatura que es manté a l'hivernacle.

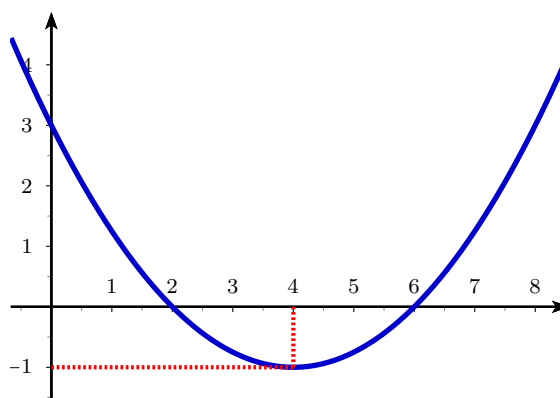


- (a) Si la temperatura està entre 15 °C i 29 °C, digueu quina variació experimenta la producció en augmentar la temperatura 1 °C. Calculeu aquesta variació quan la temperatura està entre 30 °C i 39 °C.
- (b) Definiu una funció a trossos que expressi la producció segons la temperatura.
- (c) Trobeu les temperatures per a les quals s'obté el 75 % de la producció màxima.

QÜESTIONS

13. Considereu la funció real de variable real $f(x) = \frac{x^2 + 5x}{x - 4}$.

- (a) Determineu-ne els intervals de creixement i decreixement.
- (b) Trobeu-ne els extrems relatius.
14. Una persona va invertir 6000 € comprant accions de dues empreses, A i B. Al cap d'un any, el valor de les accions de l'empresa A ha pujat un 5% i, en canvi, el valor de les accions de l'empresa B ha baixat un 10%. Tot i això, si vengués ara les accions guanyaria 150€. Determineu quants diners va invertir en accions de cada empresa.
15. Considereu el sistema d'inequacions següent:
$$\begin{cases} x - 4y \geq -11 \\ x + y \geq 4 \\ x - 4y \leq -6 \\ x + y \leq 9 \end{cases}$$
- (a) Dibuixeu la regió de solucions del sistema.
- (b) Una funció objectiu $f(x, y) = ax + by + c$ pren el valor mínim en aquesta regió en el punt $\left(4, \frac{15}{4}\right)$. Digueu si també pren el valor mínim en altres punts de la regió i, si és així, determineu-los.
16. La gràfica següent representa una funció polinòmica de segon grau (paràbola).



- (a) Trobeu el vèrtex de la paràbola i les interseccions amb els eixos.
- (b) Determineu l'equació de la paràbola.

PROBLEMES

17. Considereu el sistema d'equacions lineals següent:
$$\begin{cases} x + y + 3k &= k \\ 2y + z &= 0 \\ x + 3y + k^2z &= 2 \end{cases}$$
- (a) Discussiu el sistema en funció del paràmetre k .
- (b) Determineu la solució del sistema per al valor de k que fa que el sistema sigui indeterminat.
- (c) Trobeu la solució per a $k = 1$.

18. Una empresa de mobles fabrica dos models d'armaris, A i B. Per al model A calen 5 h 30 min de feina i 2 m de fusta. Per al model B calen 4 h de feina i 3 m de fusta. L'empresa no pot fabricar més de 430 armaris per setmana, disposa de 2800 h de feina i de 1200 m de fusta. Els armaris de tipus A i B proporcionen, respectivament, 250 € i 310 € de benefici cadascun. Determineu el nombre d'armaris de cada tipus que s'han de fabricar per a obtenir el benefici màxim.

Capítol 6

Selectivitat-2009

QÜESTIONS

1. Considereu el sistema d'inequacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 5y \leq 10 \\ 3x + 4y \leq 12 \end{array} \right\}$$

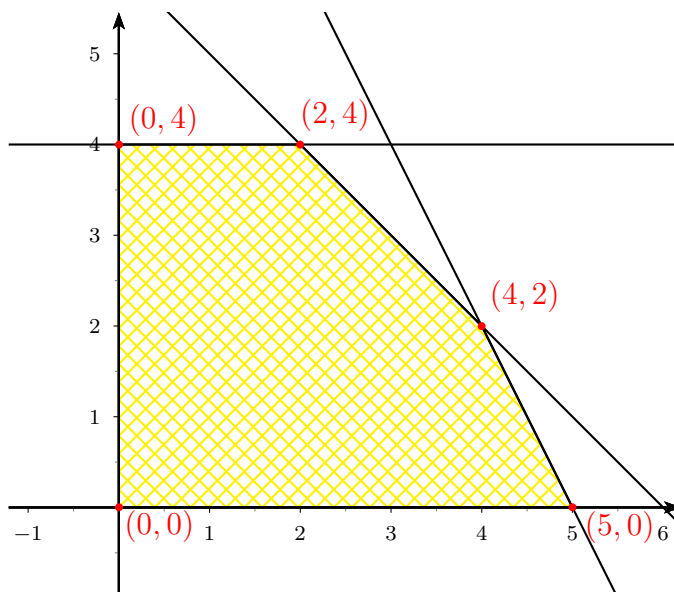
- (a) Dibuixeu la regió de solucions del sistema.
- (b) Determineu el màxim de la funció $f(x, y) = x + 3y$ quan està sotmesa a les restriccions anteriors.
2. Un botiguer compra deu televisors i sis equips de música. D'acord amb el preu marcat hauria de pagar 10480 €. Com que paga al comptat, li fan un descompte del 5% en cada televisor i del 10% en cada equip de música, i només ha de pagar 9842 €. Quin és el preu marcat de cada televisor i de cada equip de música?
3. Segons un estudi sobre l'evolució de la població d'una espècie protegida determinada, podem establir el nombre d'individus d'aquesta espècie durant els propers anys mitjançant la funció $f(t) = \frac{50t + 500}{t + 1}$, en què t és el nombre d'anys transcorreguts.
- (a) Calculeu la població actual i la prevista per d'aquí a nou anys.
- (b) Determineu els períodes en què la població augmentarà i els períodes en què disminuirà.
- (c) Esbrineu si, segons aquesta previsió, la població tendirà a estabilitzar-se en algun valor i, si escau, determineu-lo.

4. Considereu el sistema d'equacions següent:
- $$\left. \begin{array}{rcl} x - 2y + 3z & = & 3 \\ -x + y + 2z & = & 1 \\ 7x - 10y + z & = & a \end{array} \right\}$$

- (a) Digueu per a quins valors del paràmetre a el sistema és incompatible.
- (b) Resoleu el sistema per al valor de a per al qual el sistema és compatible, i trobeu-ne una solució entera.

PROBLEMES

5. La figura següent representa la regió de solucions d'un sistema d'inequacions lineals:



- Trobeu el sistema d'inequacions que determina aquesta regió.
 - Determineu el valor màxim de la funció $f_1(x, y) = x + y + 1$ en aquesta regió, i digueu en quins punts s'assoleix aquest màxim.
 - Trobeu el valor de a perquè la funció $f_2(x, y) = ax + 2y + 3$ assoleixi el màxim en el segment comprès entre els extrems $(4, 2)$ i $(5, 0)$.
 - Determineu els valors de a per als quals la funció $f_2(x, y) = ax + 2y + 3$ assoleix el màxim només en el punt $(4, 2)$.
6. El preu de cost d'una unitat d'un cert producte és de 120 €. Si es ven a 150 € la unitat, el compren 500 clients. Per cada 10 € d'augment en el preu, les vendes disminueixen en 20 clients.
- Trobeu una fórmula mitjançant la qual obtinguem els beneficis.
 - Calculeu a quin preu p per unitat hem de vendre el producte per a obtenir un benefici màxim.
 - En el cas anterior, trobeu el nombre d'unitats que es venen i calculeu el benefici màxim.

QÜESTIONS

7. Considereu la funció següent:
$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ x - 1 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ 3 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

- Feu-ne la representació gràfica.
- Digueu en quins punts és discontinua i quin tipus de discontinuïtat té.

8. Considereu la regió determinada pel sistema d'inequacions següent:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 4 \\ -x + y \geq 0 \end{cases}$$

(a) Representeu aquesta regió.

(b) Esbrineu si la funció $f(x, y) = x - 3y + 6$ té màxim en aquesta regió i, si escau, trobeu-lo.

9. L'evolució de la població d'un estat, en milions d'habitants, es pot aproximar mitjançant la funció

$$P(t) = \frac{20t}{4 + t^2} + 40$$

en què t és el temps en anys.

(a) Calculeu la població actual (per a $t = 0$).

(b) Determineu el límit de $P(t)$ quan t tendeix a infinit.

(c) Determineu al cap de quants anys la població serà màxima i el nombre d'habitants que la funció prediu per a aquest màxim.

10. Considereu el sistema d'equacions següent:
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ px + 2y = -2 \end{cases}$$

(a) Discussiu el sistema segons els valors del paràmetre p .

(b) Resoleu-lo per a $p = 5$.

PROBLEMES

11. Un agricultor disposa d'un camp on plantarà patates i pastanagues. Les patates per a plantar costen 1,5 €/kg, i les pastanagues, 1,75 €/kg. La quantitat de patates plantades no pot superar el doble de la quantitat de pastanagues, i tampoc no pot ser inferior a la meitat de les pastanagues plantades. La despesa que aquest agricultor ha de fer per plantar les patates i les pastanagues no pot superar els 150 €. Per cada kilogram que planta, obté un benefici, després de la venda, de 20 €/kg per a les patates i de 50 €/kg per a les pastanagues. Determineu quina quantitat de cada producte ha de sembrar per tal que el benefici després de la venda sigui màxim.
12. Fa un any, una persona va invertir 12000€ en accions de tres empreses, que anomenarem A, B i C. Ara, les accions de l'empresa A han augmentat de valor en un 25%, les de l'empresa B han augmentat en un 10% i, en canvi, les de l'empresa C han perdut un 15% del seu valor. Si ara vengués totes les accions, no obtindria ni pèrdues ni beneficis. Sabent que va invertir en les accions de l'empresa C el mateix que en les altres dues juntes, calculeu la quantitat de diners que va invertir en accions de cada empresa.

QÜESTIONS

13. Considereu el sistema d'inequacions següent:
$$\begin{cases} 2x + y \leq 10 \\ x + y \leq 8 \\ x \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
- (a) Representeu gràficament la regió de solucions.
- (b) Determineu el màxim de la funció $f(x, y) = 2x + y$ en aquesta regió. Digueu per a quins valors s'assoleix aquest màxim.
14. Digueu si un sistema de dues equacions amb tres incògnites pot ser incompatible. Justifiqueu la resposta i, si escau, exemplifiqueu-ho.
15. Calculeu els paràmetres a, b i c de la funció $f(x) = ax^2 + bx + c$, sabent que la recta $5x - y - 2 = 0$ és tangent a la corba $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 0$ i que el valor mínim absolut que pren la funció és $-\frac{49}{12}$.
16. Considereu el sistema d'equacions següent:
$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$
- (a) Expliqueu, raonadament, quantes solucions té.
- (b) Trobeu una solució amb $z = 5$.

PROBLEMES

17. Un llibreter vol fer una comanda de dues classes de llibres a dos editors, A i B. L'editor A ofereix lots de cinc llibres d'assaig i cinc novel·les per 50 €. L'editor B ofereix lots de cinc llibres d'assaig i deu novel·les per 150 €. El llibreter vol comprar, com a mínim, 2500 llibres d'assaig i 3500 novel·les. Per un compromís adquirit amb l'editor B, no pot comprar a l'editor A més de tres vegades el que compra a l'editor B. Determineu quants lots haurà de comprar a cada editor per a minimitzar el cost i poder complir el seu compromís.
18. La taxa d'inflació interanual d'un país determinat durant l'any 2008 expressada en punts percentuals, $i(t)$, es pot aproximar mitjançant la funció

$$i(t) = \frac{t^2 - 10t + 9}{40} + 3, \quad 1 \leq t \leq 12$$

en què t és el temps en mesos des del començament de l'any i $t = 1$ és el mes de gener.

- (a) Trobeu en quins mesos la taxa d'inflació interanual és de 3 punts percentuals.
- (b) Trobeu en quins mesos la taxa d'inflació és decreixent i en quins mesos és creixent.
- (c) Trobeu en quin mes la taxa assoleix el valor mínim i calculeu aquest valor.

- (d) Feu un esbós de la gràfica d'aquesta funció.
- (e) Trobeu en quin mes la taxa assoleix el valor màxim i calculeu aquest valor.

Capítol 7

Selectivitat-2010

1. Considereu la funció següent: $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$:

- (a) Determineu-ne les asímptotes horitzontals i verticals, si n'hi ha.
- (b) Si $f'(x) > 0$ en tot el domini de la funció f , calculeu els límits laterals quan x tendeix a -2 i feu un esbós de la gràfica de la funció f .

2. Considereu la funció següent:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + b & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

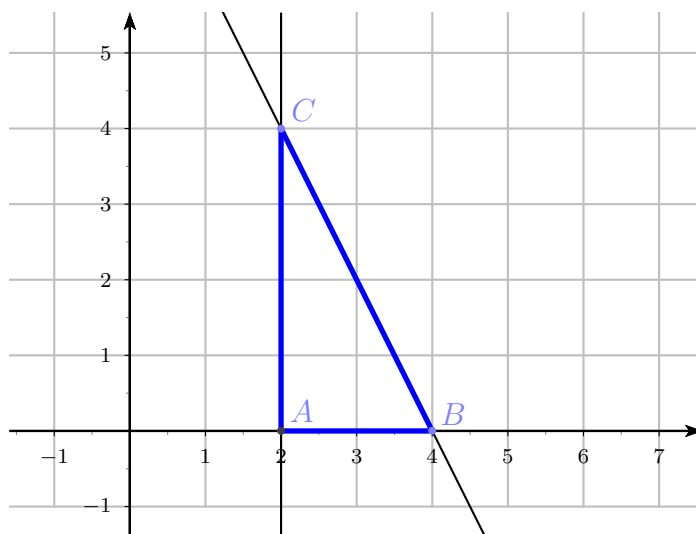
- (a) Determineu el valor de b perquè la funció f sigui contínua en el punt $x = 0$. Justifiqueu si f pot ser discontinua en algun altre punt.
 - (b) Justifiqueu si, per a valors positius de x , la funció f és creixent o decreixent.
3. Una botiga ha venut 225 llapis de memòria de tres models diferents, que anomenarem A , B i C , i ha ingressat un total de 10500 €. El llapis A costa 50 €, i els models B i C són, respectivament, un 10% i un 40% més barats que el model A . La suma total de llapis venuts dels models B i C és la meitat que la de llapis venuts del model A . Calculeu quants exemplars s'han venut de cada model.
4. En una empresa artesana que produeix cadires, la funció de costos en relació amb el nombre q de cadires produïdes és:

$$C(q) = \frac{q^3}{100} + 4q + 20$$

Si q és el nombre de cadires produïdes, el cost mitjà de cada cadira s'expressa mitjançant la funció $Q(q) = \frac{C(q)}{q}$.

- (a) Calculeu el cost mitjà de cada cadira, si l'empresa produeix 5 cadires. I si en produeix 100?
- (b) Determineu quantes cadires cal produir perquè el cost mitjà sigui mínim, justifiqueu que es tracta efectivament d'un mínim i calculeu aquest cost mitjà.

5. Considereu el triangle ABC que es mostra en la figura següent:



- Escriuiu el sistema d'inequacions que determinen el triangle i l'interior d'aquest.
- Indiqueu els punt de la regió indicada en què la funció $z = 2x + y$ assoleix el valor màxim.

6. Considereu la recta r , d'equació $x + 2y = 4$.

- Escriuiu l'equació d'una recta r' que passi per l'origen de coordenades i que formi amb r un sistema d'equacions incompatible. Justifiqueu quina serà la posició relativa de les dues rectes.
- Considereu una altre recta, que anomenarem s , que forma amb r un sistema de dues equacions amb dues incògnites que és compatible indeterminat. Justifiqueu quina és la posició relativa de les rectes r i s .

.....

7. En una botiga de queviures hem comprat ampelles d'aigua a 0,5 € cadascuna, de llet a 1 € i de suc de fruita a 1,5 €. En arribar a la caixa ens adonem que portem 40 ampelles, el cost total de les quals és de 38 €. També observem que si les ampelles d'aigua que portem fossin de llet i les de llet fossin d'aigua, la compra ens sortiria 4 € més barata. Determineu el nombre d'ampelles de cada beguda que hem comprat.

8. Donada la funció següent: $f(x) = \frac{-4x^2}{x+1}$

- Determineu-ne les asímptotes horitzontals i verticals, si n'hi ha.
- Trobeu els punts de la corba en què la recta tangent és paral·lela a la recta $y = -3x + 4$.

9. Considereu la funció $f(x) = x \cdot e^{-x}$

- Indiqueu-ne els extrems relatius, si n'hi ha, i classifiqueu-los.

(b) Escriviu l'equació de la recta tangent a la corba en el punt d'abscissa 0.

10. Una botiga de bijuteria ven anells i collarets en lots de dos tipus: el lot de tipus A està format per un anell i un collar, mentre que el lot de tipus B consta de 3 anells i un collar. Sabem que disposen de 1500 anells i de 1000 collars. En cada lot de tipus A guanyen 0,70 €, mentre que en cada lot de tipus B guanyen 1 €. Indiqueu quants lots de cada tipus han de vendre per a obtenir el màxim benefici.

11. Considereu les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Comproveu si aquestes dues matrius compleixen $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

(b) Si P i Q són matrius quadrades qualsevol d'ordre 3, quina condició s'ha de produir perquè es compleixi $(P + Q)^2 = P^2 + 2P \cdot Q + Q^2$?

12. En una explotació ramadera es declara una epidèmia, i els veterinaris preveuen que la propagació d'aquesta seguirà la funció $f(x) = -2x^2 + 48x + 162$, en què x representa el nombre de setmanes que han transcorregut des del moment de la declaració de l'epidèmia, i $f(x)$ indica el nombre d'animals afectats.

(a) Quants animals hi ha afectats en el moment de declarar-se l'epidèmia? Quantes setmanes durarà l'epidèmia fins al moment en què ja no quedi cap animal afectat?

(b) Indiqueu quin serà el nombre màxim d'animals afectats, i en quina setmana es produirà.

.....

13. Donat el sistema d'equacions següent:
$$\left. \begin{array}{l} x + 5y + 2z = 2 \\ 2x + 4y + z = 4 \\ x - y - z = 2 \end{array} \right\}$$

(a) Determineu-ne la solució general, en funció de z .

(b) Calculeu la solució particular segons la qual $z = 2$.

14. Volem construir el marc d'una finestra rectangular de 100 dm² de superfície. El cost de cada decímetre de marc horitzontal és de 6 €, mentre que el de cada decímetre de marc vertical és de 24 €. Calculeu les dimensions de la finestra perquè el marc ens surti tan barat com sigui possible.

15. Un concessionari de motos comercialitza dos models, un de 125 cc i un altre de 50 cc. Per cada moto de 125 cc que ven, guanya 1000 € i per cada moto de 50 cc, guanya 600 €. D'altra banda, per tal de satisfer els objectius marcats pel fabricant, cal que el concessionari compleixi les condicions següents:

(a) Vendre entre 50 i 150 motos de 125 cc.

- (b) Vendre almenys tantes motos de 50 cc com de 125 cc.
- (c) No vendre més de 500 motos de 50 cc.

Determineu quantes motos de cada tipus ha de vendre el concessionari per a obtenir el màxim benefici, i calculeu aquest benefici màxim.

16. Considereu la funció següent: $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$

- (a) En quin punt de la corba la recta tangent a la gràfica de f és paral·lela a la recta $x + y = 5$?
- (b) Calculeu les asímptotes horitzontals i verticals de la funció, si n'hi ha, i feu un esbós de la gràfica de la funció f .

17. Donada la funció $f(x) = x^2 \cdot e^x$:

- (a) Justifiqueu si hi ha cap valor de x que compleixi $f(x) < 0$. Hi ha cap valor de x que compleixi $f(x) = 0$?
- (b) Indiqueu si la funció f és creixent o decreixent en el punt $x = -1$. Estudieu el creixement de la funció f per als valors que compleixen $x > 0$.

18. Donades les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Calculeu A^{-1} i B^{-1} .
- (b) Determineu X perquè es compleixi l'equació $A \cdot X \cdot B = 2C$.

.....

19. Si sumem 2 unitats al denominador d'una fracció, la nova fracció val 1 unitat. En canvi, si sumem 3 unitats al numerador de la fracció original, la nova fracció val 2 unitats. Determineu la fracció original.

20. Considereu la funció $f(x) = x^3 - ax^2 + 9x + b$.

- (a) Determineu a i b , sabent que la gràfica de f passa pel punt $(2, 2)$ i té un extrem en $x = 1$.
- (b) Per a $a = 6$ i $b = 0$, determineu els possibles màxims i mínims de f i classifiqueu-los.

21. Un fons d'inversions posa en marxa un producte financer que aporta un benefici de $R(x)$ euros en fer una inversió de x centenars d'euros, segons la funció $R(x) = -0,01x^2 + 4x + 20$.

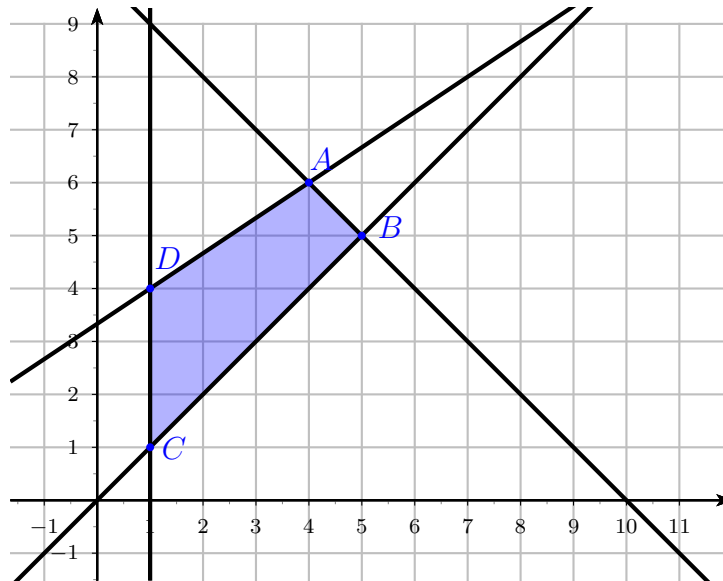
- (a) Calculeu quina inversió produeix més beneficis.
- (b) Calculeu el tant per cent de benefici que s'obtindrà amb una inversió de 1000 €, i el que s'obtindrà amb una de 10000 €.

22. Considereu les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Determineu la matriu X perquè $X + BC = A^2$.
- (b) Calculeu les matrius C^6 i C^7 .

23. Considereu la regió del pla representada en la figura següent:



- (a) Determineu les inequacions que defineixen els punts interiors i els punts de la frontera del quadrilàter $ABCD$.
- (b) Determineu els punts en què s'assoleix el màxim i el mínim de la funció $f(x, y) = 2x - 2y + 7$, i digueu quins són aquests valors.

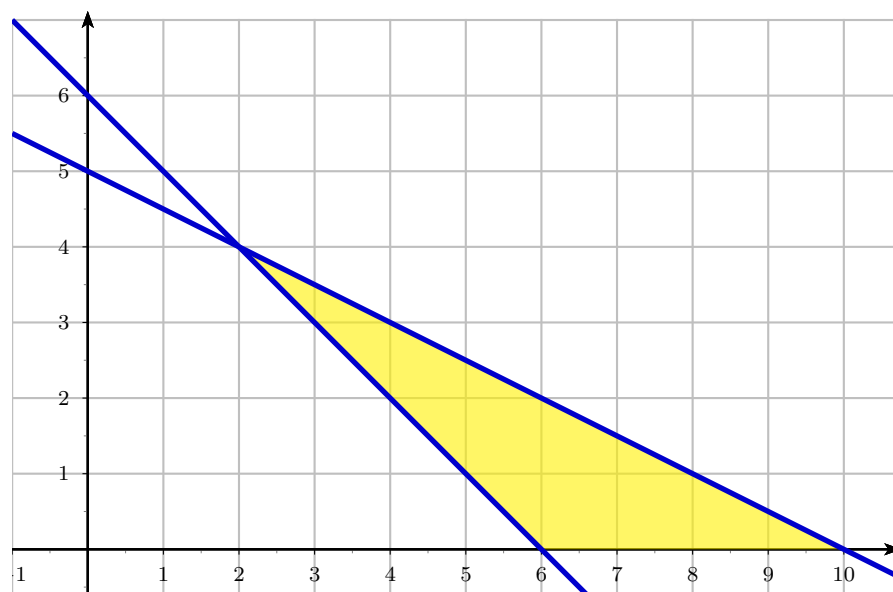
24. Donada la funció següent: $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

- (a) Determineu-ne el domini i els valors de x per als quals el signe de la funció f és negatiu.
- (b) Determineu les asímptotes horitzontals i verticals de la funció f .

Capítol 8

Selectivitat-2011

1. Una empresa compra tres immobles per un valor total de 2 milions d'euros. En vendre'ls, espera obtenir uns guanys del 20%, del 50% i del 25%, respectivament, que li reportaran uns beneficis totals de 600000 euros. En el moment de posar-los a la venda, però, aconseguix uns guanys del 80%, del 90% i del 85%, respectivament, cosa que li reporta uns beneficis totals d'1,7 milions d'euros. Quant havia pagat per cada immoble?
2. Considereu la regió ombrejada de la figura següent:



- (a) Determineu el sistema d'inequacions que la delimita.
 - (b) Calculeu el valor màxim de la funció $z = x + 2y$ en aquesta regió, i indiqueu per a quins valors s'assoleix aquest màxim.
3. Considereu la funció següent: $f(x) = \frac{2x^2}{ax + 1}$:
 - (a) Determineu el valor de a que fa que la funció f tingui un extrem en el punt $x = 1$, i indiqueu si es tracta d'un màxim o d'un mínim.
 - (b) Per a $a = 3$, indiqueu les asímptotes horitzontals i verticals de la funció f .

4. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
- (a) Una matriu B , la primera fila de la qual és $(1, 0)$, té dues columnes i compleix que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Completeu-la.
- (b) Feu els càlculs pertinents per a comprovar que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.
5. Una empresa que fabrica bicicletes ven la totalitat de la producció. Anomenarem x el nombre de bicicletes que fabrica mensualment. Els costos mensuals de producció, en euros, segueixen la funció $C(x) = 180x + 12000$. La venda de les bicicletes li reporta uns ingressos que segueixen la funció $I(x) = 500x - \frac{1}{2}x^2$. Els beneficis de l'empresa són, lògicament, la diferència entre ingressos i costos.
- (a) En quin interval cal situar la producció per a no perdre diners?
- (b) Quantes bicicletes ha de produir mensualment l'empresa per a obtenir el benefici màxim? En aquest cas, quant guanya per cada bicicleta?
6. Considereu la funció $f(x) = x - e^{-3x}$.
- (a) Indiqueu-ne el domini, i demostreu que f és estrictament creixent en tot el domini.
- (b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa $x = 0$.
-
7. Considereu la funció $f(x) = x - \ln(x)$.
- (a) Indiqueu-ne el domini. Determineu l'asíptota vertical de la funció f .
- (b) Determineu els intervals en què la funció f és creixent i els intervals en què és decreixent, i classifiqueu-ne els extrems possibles.
8. Considereu la regió del pla limitada per les rectes $x = 0, y = 0, 2x - 3y = -6, x + 3y = 15$ i $x = 6$.
- (a) Dibuixeu-la, calculeu-ne els vèrtexs i justifiqueu si els punts $P(1, 3)$ i $Q(3, 3)$ pertanyen o no a aquesta regió.
- (b) Calculeu en quins punts d'aquesta regió la funció $f(x, y) = x + 4y$ assoleix el valor màxim i el valor mínim, i indiqueu aquests valors.
9. Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- (a) Calculeu les matrius inverses de A i de B .
- (b) Determineu una matriu X de manera que $A \cdot X \cdot B = C$.

10. Considereu la funció $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

(a) Feu-ne una representació gràfica aproximada. Justifiqueu per a quins valors de x la funció és discontinua.

(b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa $x = 4$.

11. Considereu el sistema $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -x + 4y - 5z = -8 \end{cases}$

(a) Comproveu que té infinites solucions. Determineu-les.

(b) Determineu, si és possible, una solució en què la suma de les tres incògnites sigui 5.

12. Un bosc té una massa forestal de 40000 m³ de fusta. Es calcula que la pluja àcida i els incendis provoquen una disminució del 6% anual de l'esmentada massa forestal, que es pot expressar en termes de la funció $F(t) = 40000 \cdot 0,94^t$, en què $F(t)$ és la massa forestal que queda passats t anys.

(a) Justifiqueu que la funció F és estrictament decreixent.

(b) D'aquí a quants anys la massa forestal s'haurà reduït a la meitat?

.....

13. Un estudi de laboratori sobre la propagació d'una espècie de mosques mostra que, passades t setmanes, el nombre d'individus és $N(t)$ centenars de mosques, en què $N(t) = -(t-2)^2 + 9$.

(a) Quantes mosques formen la població al cap d'una setmana? Quantes setmanes han de transcórrer fins a la desaparició total de les mosques?

(b) Quina és la població màxima d'individus? Quantes setmanes han hagut de passar per a obtenir aquesta població màxima?

14. Una empresa fabrica dos tipus de begudes, que anomenarem B_1 i B_2 , i en el procés de fabricació fa servir dos tipus d'ingredients, que designarem C i D . Disposa de 90L de C i de 150L de D . Per cada bidó de beguda B_1 calen 1L d'ingredient C i 2L d'ingredient D , i per cada bidó de beguda B_2 calen 2L de C i 1L de D . Sabem que cada bidó de B_1 dóna 10 € de benefici, i que cada bidó de B_2 en proporciona 15 €.

(a) Plantegeu les inequacions corresponents a les restriccions indicades, calculeu els vèrtexs de la regió factible, i dibuixeu-la.

(b) Escriviu la funció objectiu. Quants bidons de cada tipus cal fabricar per a obtenir el benefici màxim? Quin és aquest benefici?

15. Considereu el triangle de vèrtexs $A = (2, -1)$, $B = (5, 0)$ i $C = (2, 4)$.
- (a) Determineu les equacions de les rectes del pla que contenen els costats del triangle ABC.
 - (b) Considereu el sistema d'equacions format per les tres equacions de l'apartat anterior. Determineu el rang de la matriu associada i el rang de la matriu ampliada d'aquest sistema. Justifiqueu la resposta.
16. Determineu dos nombres enters positius que sumin 25, de manera que el doble del quadrat del primer sumat amb el triple del quadrat del segon doni el mínim valor possible.
17. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.
- (a) Una matriu B, la primera fila de la qual és $(2, 1)$, té dues columnes i compleix que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, Completeu-la.
 - (b) Calculeu $(A \cdot B)^{-1}$.
18. Sabem que la funció $f(x) = ax^3 + 3x^2 - bx - \frac{1}{3}$ passa pel punt $(1, 0)$, i que la recta tangent a la gràfica de la funció en aquest punt és paral·lela a la recta $12x - 2y = 3$.
- (a) Determineu els valors dels paràmetres a i b .
 - (b) Per a $a = 1$ i $b = 9$, determineu, si n'hi ha, les abscisses dels extrems possibles (màxims o mínims) de la funció, i classifiqueu-los.

Capítol 9

Selectivitat-2012

1. Sobre la funció $f(x) = \frac{a}{x^2 + bx + c}$ disposem de les dades següents:
 - les seves asímptotes verticals són $x = -3$ i $x = 1$;
 - la seva gràfica passa pel punt $(0, -4)$.
 - (a) Determineu la fórmula de la funció i feu un dibuix aproximat de la gràfica corresponent.
 - (b) En el cas $a = 1, b = -2$ i $c = -1$, determineu i classifiqueu, si existeixen, els extrems relatius de la funció.
2. Construïm en el pla el quadrilàter de vèrtexs $A(1, 1), B(2, 4), C(4, 5)$ i $D(3, 0)$, els costats del qual són els segments AB, BC, CD i DA .
 - (a) Escriviu les desigualtats que determinen la regió del pla continguda i sobre els costats del quadrilàter $ABCD$.
 - (b) Feu servir les desigualtats anteriors per a justificar si els punts $P(3, 1), Q(3, 4)$ i $R(5, 2)$ són interiors, exteriors o estan sobre els costats del quadrilàter.
3. Considerem les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.
 - (a) Justifiqueu si és possible efectuar $A \cdot B$ o $B \cdot A$. En cas afirmatiu, calculeu-ho.
 - (b) Calculeu B^2 i B^3 .
4. Un triangle té els vèrtexs $O(0, 0), A(6, 0)$ i $B(0, 3)$.
 - (a) Dibuixeu-lo i escriviu l'equació de la recta que conté el segment AB .
 - (b) Considerem un punt P situat sobre el segment AB , i dibuixem el rectangle que té per diagonal OP i dos costats sobre els eixos de coordenades. Determineu les coordenades de P que fan màxima l'àrea del rectangle.
5. Sigui f una funció polinòmica de grau 3, amb un màxim a $(0, 0)$ i un mínim a $(2, -4)$.
 - (a) Feu una gràfica aproximada de f .
 - (b) Determineu la fórmula de la funció.

6. En Joan, en Pere i en Marc tenen, entre els tres, seixanta-tres anys. Si en Joan tingués tres anys menys, la seva edat seria el doble de les edats d'en Pere i en Marc junts. Si en Pere tingués un any més, la seva edat seria la meitat de la d'en Marc. Quina és l'edat actual de cadascun d'ells?
-
7. La població de bacteris en una mostra evoluciona segons la funció $f(t) = -t^2 + 4t + 12$, on t correspon al nombre de setmanes des de l'inici de l'experiment, i $f(t)$ és el nombre d'individus que formen la mostra, en milions d'unitats.
- (a) Quantes setmanes han de passar fins a la desaparició de la població?
- (b) Quin serà el nombre màxim d'individus de la mostra, i al cap de quantes setmanes s'aconseguirà?
8. Construïm en el pla el triangle de vèrtexs $A(-3, 1)$, $B(1, 2)$ i $C(-2, 3)$.
- (a) Trobeu les inequacions que determinen la regió del pla continguda i sobre els costats del triangle ABC .
- (b) Justifiqueu si els punts $P(0, 2)$, $Q(2, 2)$ i $R(-1, 2)$ són interiors, exteriors o es troben sobre els costats del triangle.
9. Donada la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, determineu els valors dels tres paràmetres sabent que la gràfica de la funció passa pel punt $(1, 18)$ i que té extrems relatius per a $x = -2$ i $x = 4$.
10. Una empresa cinematogràfica disposa de tres sales, A, B i C. Els preus d'entrada a aquestes sales són de 7 €, 8 € i 9 €, respectivament. Un dia determinat, la recaptació conjunta de les tres sales va ser de 1520 €, i el nombre total d'espectadors va ser 200. Si s'haguessin intercanviat els espectadors de les sales A i B, la recaptació total s'hauria incrementat en 20 €. Calculeu el nombre d'espectadors que va acudir a cada una de les sales.
11. Considerem la funció $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$.
- (a) Escriviu la fórmula de la funció que a cada nombre real, x , li fa correspondre el pendent de la recta tangent a f en el punt d'abscissa x .
- (b) Determineu l'equació de la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa $x = -1$.
12. Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$
- (a) Determineu les matrius X i Y que compleixin que $X - 2Y = A$ i $2X - Y = B$.
- (b) Calculeu $(A + 2 \cdot Id)^2$, on Id és la matriu identitat.
-

13. Considerem les funcions $f(x) = (x - a)^3$ i $g(x) = -x^2 + bx + c$.
- Determineu els valors dels paràmetres que fan que les dues corbes tinguin la mateixa tangent en el punt $(2, 1)$.
 - En el cas $a = 11$, feu una gràfica aproximada de la funció f .
14. Considerem la funció $f(x) = \frac{12}{x}$.
- Indiqueu-ne el domini i estudeu-ne el creixement.
 - Calculeu les equacions de les rectes tangents a la gràfica de f que són paral·leles a la recta $y + 3x = 2$.
15. Una botiga ven llaunes de beguda a $0,6 \text{ €}$ la llauna, però si comprem un paquet de sis llaunes ens cobren 3 € .
- Quin és el percentatge d'estalvi en comprar un paquet respecte a la compra de sis llaunes soltes?
 - En una setmana, la botiga ha venut 240 llaunes i ha ingressat $132,6 \text{ €}$. Quants paquets de sis llaunes ha venut?
16. Una petita fàbrica produeix formatge i mantega. Per a fabricar un formatge es necessiten 10 litres de llet, mentre que per a fabricar una pastilla de mantega se'n necessiten 5. La quantitat de formatges produïts no pot superar el doble de la quantitat de pastilles de mantega. De la mateixa manera, la quantitat de pastilles de mantega no pot superar el doble de la quantitat de formatges produïts. En total, la fàbrica disposa de 800 litres de llet. Després de la venda, per cada formatge s'obté un benefici de 5 € i per cada pastilla de mantega s'obté un benefici de 2 € . Determineu quina quantitat de formatges i quina quantitat de pastilles de mantega cal produir per tal que el benefici total després de la venda sigui màxim. Quin benefici s'obtindrà?
17. Disposem de 48 cm^2 de material per a fabricar una capsula de base quadrada, sense tapa. Calculeu les dimensions de la capsula de volum més gran que podem construir en aquestes condicions. Quin serà el volum de la capsula?
18. Considerem les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Trobeu una matriu X que compleixi que $A \cdot B + X = C$.
 - Calculeu C^3 .

Capítol 10

Selectivitat-2013

1. Un equip científic ha estudiat l'evolució de la població d'una petita illa de la Polinèsia. Com a conclusió, ha determinat que, per tal d'obtenir una bona estimació de la població, cal fer servir l'expressió

$$P(t) = 400 + 18t - 6t^{\frac{3}{2}}$$

on t indica els anys transcorreguts des del principi de l'estudi.

- (a) Determineu la població de l'illa quan va començar l'estudi, i al cap d'un any. Quina ha estat la taxa de creixement en aquest període?
- (b) Al cap de quants anys després del començament de l'experiment va deixar de créixer la població de l'illa? Quin va ser el nombre màxim d'habitants?
2. Siguin les matrius: $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ b & -1 \end{pmatrix}$
- (a) Determineu el valor dels paràmetres a i b que fa que $A \cdot B = B \cdot A$.
- (b) Determineu el valor de a per al qual es verifica $A^2 = 2A$.
3. En un hort hi ha plantades 50 pomeres. Cada arbre produeix 800 pomes. Per cada arbre addicional que hi plantem, la producció de cada arbre es redueix en 10 pomes. Quants arbres més ens cal plantar per a obtenir la producció més alta possible? Quina és aquesta producció?
4. Els beneficis d'una companyia de transport de viatgers són donats per la funció $B(x) = ax^2 + bx + c$, on x és el preu que la companyia cobra per cada viatge. Sabem que si cobren 40€ per viatge, els beneficis són 19.000€. A més, si augmentem el preu un 25%, el benefici que s'obté és el màxim, 20.000€. Tenint en compte aquestes dades, determineu els valor de a , b i c .
5. Un botiguer va al mercat central amb la seva furgoneta, que pot carregar 700 kg, i amb 500€ a la butxaca, a comprar fruita per a la seva botiga. Hi troba pomes a 0,80€/kg i taronges a 0,50€/kg. Calcula que podrà vendre les pomes a 0,90 €/kg i les taronges a 0,58€/kg. Quina quantitat de pomes i de taronges li convé comprar si vol obtenir el benefici més gran possible?
6. Determineu els valors dels paràmetres a , b i c que fan que les corbes d'equació $f(x) = x^3 + ax + b$ i $g(x) = x^3 + cx^2 - 2$ tinguin la mateixa recta tangent en el punt $(1, 1)$.

7. He anat a una botiga i he decidit comprar uns pantalons, una camisa i unes sabates. Si faig la compra avui, em costarà tot plegat 120 €. A més, actualment, la camisa i les sabates costen, plegades, el doble dels pantalons.
- Si m'espero una setmana, els pantalons i les sabates tindran un descompte del 20 mentre que la camisa només tindrà un descompte del 10%. D'aquesta manera, pagaré 99 €. Quin és el preu inicial de cada article?
8. Donades les funcions $f(x) = x^3 + 5x^2 + (3 + k)x$ i $g(x) = x^2 + kx$.
- Determineu les abscisses dels punts de tall de les dues corbes.
 - Determineu k perquè la paràbola donada per la funció g tingui el vèrtex en el punt d'abscissa $x = 2$, i determineu-ne l'ordenada.
9. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Calculeu A^2 , A^3 i A^4 .
 - Calculeu A^{201} i A^{344} .
10. Una empresa agrícola ha recollit un total de 40 tones de fruita que produeixen un benefici de 0,80 €/kg. Cada setmana que passa es produeix una pèrdua de 400 kg de fruita, però el benefici augmenta en un cèntim per cada kilogram.
- Quin benefici s'obté si es ven la fruita al cap de nou setmanes? Quin percentatge de fruita s'ha hagut de llençar?
 - Quina setmana de venda serà la que obté un benefici màxim?
11. Segons uns estudis de laboratori, l'evolució de la població en un cultiu de bacteris al llarg del temps segueix la funció $f(t) = 30 \cdot (1 - e^{-t}) + 10$, on t són els dies que han transcorregut des de l'inici de l'experiment, i $f(t)$ és la població, en milions de bacteris.
- Quina població hi ha en el moment de començar l'experiment? Justifiqueu si en algun moment hi arribarà a haver 40 milions de bacteris.
 - Hi haurà algun moment en què la població sigui màxima? Justifiqueu la resposta.
12. Tinc un problema: fabrico televisors de LED, que em deixen un benefici de 100 € cadascun, i televisors de plasma, que em donen la meitat de benefici unitari. No puc produir més de 30 televisors al dia, i la diferència entre la producció dels de LED i els de plasma és, com a màxim, de quatre unitats. Quants n'he de produir de cada classe per a guanyar el màxim?

13. Donada una funció f , sabem que $f'(x) = e^{-x} \cdot (2x^2 - 3x)$.
- Estudieu el creixement i el decreixement de la funció f .
 - Si la funció f té extrems relatius, indiqueu-ne les abscisses i classifiqueu-los.
14. La Júlia, en Pol i la Maria han anat a comprar fruita. La Júlia ha comprat un kilogram de pomes, dos de préssecs i tres de taronges, i ha pagat 9€. En Pol ha comprat dos kilograms de pomes i quatre de préssecs, i ha pagat 12€. La Maria, en canvi, ha comprat quatre kilograms de pomes i dos de taronges, i ha pagat 8€. Calculeu el preu del kilogram de cada fruita.
15. Els dos darrers anys, el valor de les accions en borsa d'una empresa ha baixat un 20% anual.
- Aquest any, en canvi, les accions han pujat un 30%. Quin és el percentatge global de pèrdua en aquests tres anys?
 - Quin hauria de ser el percentatge de guanys d'aquest tercer any si el balanç global dels tres anys acaba sent equilibrat, és a dir, sense pèrdues ni guanys?
16. Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \end{pmatrix}$
- Resoleu l'equació matricial $X + 2A = X \cdot A$, on X és la matriu incògnita.
 - Hi ha cap matriu Y que verifiqui $Y \cdot A = B$? I que verifiqui $A \cdot Y = B$? Justifiqueu les respostes.
17. Un florista disposa de 50 margarides, 80 roses i 80 clavells, i en fa rams de dues classes: per a uns fa servir 10 margarides, 20 roses i 10 clavells, i per als altres fa servir 10 margarides, 10 roses i 20 clavells. La primera classe de rams es ven a 40€, mentre que la segona es ven a 50€. Quants rams de cada classe ha de fer si vol ingressar el màxim possible?
18. La demanda d'energia elèctrica d'una ciutat, comptada a partir de la mitjanit i fins a les vuit del matí, és donada per la funció $f(t) = \frac{t^2 - 6t + 12}{6}$, on t s'expressa en hores (h) i $f(t)$, en milions de kilowatts hora (kW h).
- A quina hora el consum coincideix amb el de la mitjanit, i quin és aquest consum?
 - A quina hora es donarà el mínim consum? Justifiqueu que, efectivament, es tracta d'un mínim.

Capítol 11

Selectivitat-2014

1. En Pol, la Júlia i la Maria han comprat un regal. La Júlia ha gastat la meitat de diners que la Maria, i en Pol n'ha gastat el triple que la Júlia.
 - (a) Expliqueu raonadament si amb aquestes dades en tenim prou per a determinar quant ha gastat cadascun d'ells.
 - (b) Si a més ens diuen que entre tots tres han gastat 63 €, quant ha gastat cadascú?
2. La gràfica de la derivada $f'(x)$ de la funció f es una paràbola que talla l'eix d'abscisses en els punts $(5, 0)$ i $(1, 0)$, i té el vèrtex en el punt $(3, -4)$.
 - (a) Expliqueu raonadament en quins intervals la funció f es creixent i en quins intervals es decreixent. Indiqueu-ne els extrems relatius i classifiqueu-los.
 - (b) Sabem que $f(3) = 2$. Determineu l'equació de la recta tangent a la funció f en el punt $(3, 2)$.
3. Una cadena de televisió decideix emetre un nou programa en la franja horària de les 17.00 h a les 21.00 h. El percentatge d'audiència P de la primera emissió en funció del temps t , mesurat en hores, és definit per la funció

$$P(t) = \frac{1}{5} (-t^3 + 49t^2 - 760t + 3690) \quad 17 \leq t \leq 21$$

Els directius de la cadena acorden que el programa se seguirà emetent si en algun moment s'aconsegueix un percentatge d'audiència superior al 20%.

- (a) Expliqueu raonadament en quins intervals de temps l'audiència del programa va augmentar i en quins intervals va disminuir.
 - (b) En vista dels resultats, se seguirà emetent el programa? Justifiqueu la resposta.
4. Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ i $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, determineu x per tal que es verifiqui l'equació $A^2 - 6A + 5I = \mathbf{0}$, on $\mathbf{0}$ és la matriu en què tots els elements són 0.
 5. Hem de fertilitzar els terrenys d'una finca utilitzant dos adobs, A i B. El cost de l'adob A és de 0,9 €/kg, i l'adob B costa 1,5 €/kg. L'adob A conté un 20% de nitrogen i un 10% de fòsfor, mentre que l'adob B en conté un 18% i un 15%, respectivament. Per a

fertilitzar els terrenys correctament ens cal un mínim de 180 kg de nitrogen i 120 kg de fòsfor.

- (a) Si anomenem x els kilograms d'adob A i y els kilograms d'adob B, escriviu el sistema d'inequacions que satisfà les condicions anteriors.
 - (b) Quina és la despesa mínima que hem de fer si volem fertilitzar els terrenys de la finca correctament?
6. Sigui la funció $f(x) = x \cdot e^x$.
- (a) Si la funció f té extrems relatius, determineu-los i classifiqueu-los.
 - (b) Calculeu la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa $x = 0$.
7. Si un venedor d'articles de luxe fa un descompte del 20% sobre el preu de venda d'un article, guanya 1.848 € sobre el preu de cost; si fa un descompte del 50%, perd 420 €.
- (a) Calculeu el preu de cost i el preu de venda de l'article.
 - (b) Quin percentatge aplica sobre el preu de cost per calcular el preu de venda?
8. S'han corregit unes quantes proves de selectivitat i s'han puntuat amb notes entre 0 i 10. El nombre de persones que han obtingut una determinada qualificació x és definit per la funció $N(x) = 250 - (2x - 9)^2$.
- (a) Quantes persones han tret un 10 en aquesta prova? Quantes persones han tret un 6?
 - (b) Quina és la nota que han tret més persones? Quantes persones han tret aquesta nota?
9. La funció derivada d'una funció f es $f'(x) = e^{-x}(x - x^2)$
- (a) Estudieu el creixement i el decreixement de la funció f .
 - (b) Si la funció f té extrems relatius, indiqueu-ne les abscisses i classifiqueu-los.
10. El propietari d'un bar ha comprat refrescos, cervesa i vi per un total de 5.000 €, sense impostos. El vi val 600 € menys que els refrescos i la cervesa plegats. Si tenim en compte que pels refrescos ha de pagar un IVA del 6%, per la cervesa un del 12% i pel vi un del 30%, aleshores la factura total, amb els impostos inclosos, puja a 5.924 €. Calculeu quant ha pagat, sense IVA, per cada classe de beguda.
11. Una companyia aèria programa una oferta d'un màxim de 5.000 places, entre classe turista i preferent. Per cada plaça de classe turista obté uns guanys de 30 €, mentre que per cada plaça de classe preferent el benefici és de 40 €. Per raons tècniques, no és possible oferir més de 4.500 places de classe turista, i el nombre de places de classe preferent no pot superar la tercera part de les de classe turista. Calculeu quantes places de cada classe cal oferir per a maximitzar els guanys.
12. Considereu la funció $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$
- (a) Determineu-ne, si en té, les asímptotes horitzontals i verticals.

- (b) Justifiqueu que és decreixent en tot el domini de f .
13. El preu en borsa d'unes accions és definit per la funció $p(t) = 500 \cdot e^{0,3t}$, on t indica els anys transcorreguts a partir del moment present.
- (a) Si venem les accions d'aquí a un any, quin percentatge de benefici obtindrem?
- (b) D'aquí a quants anys haurem aconseguit doblar el preu de les accions?
14. Una empresa d'informàtica fabrica ordinadors portàtils i de taula i ven tots els que fabrica. L'empresa té capacitat per a fabricar 3.000 ordinadors. Per qüestions de mercat, el nombre d'ordinadors de taula no pot ser inferior a la meitat del nombre de portàtils, però tampoc no pot superar el nombre de portàtils. L'empresa guanya 100 € per cada ordinador de taula, i un 20% més en la venda de cada portàtil. Quants ordinadors de cada classe ha de fabricar per a maximitzar els beneficis?
15. Siguin les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ i $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- (a) Determineu una matriu X que verifiqui $A \cdot X = I$.
- (b) Determineu una matriu Y que verifiqui $A \cdot Y \cdot A = B$.
16. Els beneficis diaris, en centenars d'euros, d'un taller de bicicletes són definits per la funció $f(x) = -20x^2 + 50x - 20$, on x són els centenars de bicicletes venudes. El taller només té capacitat per a fabricar 200 bicicletes al dia.
- (a) Calculeu el benefici màxim diari que pot obtenir el taller.
- (b) Determineu el nombre mínim de bicicletes que ha de fabricar per a no tenir pèrdues.
17. Considereu la funció $f(x) = \frac{3x - 4}{2x - 5}$.
- (a) Indiqueu-ne el domini i els punts on la gràfica de la funció f talla l'eix d'abscisses.
- (b) Determineu-ne, si en té, les asímptotes horitzontals i verticals.
18. Un botiguer vol determinar la quantitat de bitllets de 5 €, 10 € i 20 € que ha de tenir a la botiga per a atendre millor els clients. En total, vol tenir 1.375 € en 90 bitllets a la caixa. A més, s'ha adonat que li convé tenir el doble de bitllets de 20 € que de 5 € i 10 € junts. Quants bitllets haurà de tenir de cada classe?